Problemas de Paragem Opcional em Finanças

Novos Talentos em Matemática

André Bento

ISEG

Universidade de Lisboa

Horizonte Infinito

Sejam Π, α e σ funções contínuas.

$$dX_t = \alpha(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau} e^{-\rho_s}\Pi(X_s)\ ds \,\middle|\, X_0 = x\right],$$

$$\rho_h = \int_0^t r(X_s)\ ds, \qquad 0 \leq t < \tau_I.$$

Sejam z, ϵ tais que $V(x) > 0$ sempre que $|x - z| < \epsilon$. Considere-se:

$$\theta = \inf\{t \geq 0 : |X_t - x| \geq \epsilon\}.$$

Qualquer τ que verifique $\mathbb{P}\{\tau < \theta\} > 0$ não pode ser ótimo.

$$V(x) = \sup_{\tau} \mathbb{E}_x \left(\int_0^{\tau \wedge h \wedge \theta} e^{-\rho s} \Pi(X_s)\, ds + e^{-\rho_{\tau \wedge h \wedge \theta}} V\left(X_{\tau \wedge h \wedge \theta}\right) \right)$$

Qualquer τ que verifique $\mathbb{P}\{\tau < \theta\} > 0$ não pode ser ótimo.

$$V(x) = \sup_{\tau} \mathbb{E}_x \left(\int_0^{\tau \wedge h \wedge \theta} e^{-\rho s} \Pi(X_s)\ ds + e^{-\rho_{\tau \wedge h \wedge \theta}} V\left(X_{\tau \wedge h \wedge \theta}\right) \right)$$

reduz-se a

$$V(x) = \mathbb{E}_x \left(\int_0^{h \wedge \theta} e^{-\rho s} \Pi(X_s)\ ds + e^{-\rho_{h \wedge \theta}} V\left(X_{h \wedge \theta}\right) \right),$$

ou seja

$$\mathbb{E}_x \left(V(x) - \int_0^{h \wedge \theta} e^{-\rho s} \Pi(X_s)\ ds + e^{-\rho_{h \wedge \theta}} V\left(X_{h \wedge \theta}\right) \right) = 0.$$

Usando a fórmula de Itō com $X_0 = x$:

$$e^{-\rho_{h\wedge\theta}} V\left(X_{h\wedge\theta}\right) = e^0 V(x) + \int_0^{h\wedge\theta} -r(X_s)e^{-\rho_s} V(X_s) + e^{-\rho_s} V'(X_s)\alpha(X_s) + + \frac{1}{2}e^{-\rho_s} V''(X_s)\sigma(X_s)^2 \; ds + \int_0^{h\wedge\theta} e^{-\rho_s} V'(X_s) \; dW_s.$$

Usando a fórmula de Itō com $X_0 = x$:

$$e^{-\rho_{h\wedge\theta}} V\left(X_{h\wedge\theta}\right) = e^{0} V(x) +$$

$$\int_0^{h\wedge\theta} -r(X_s) e^{-\rho_s} V(X_s) + e^{-\rho_s} V'(X_s)\alpha(X_s) +$$

$$+\frac{1}{2} e^{-\rho_s} V''(X_s)\sigma(X_s)^2 \; ds + \int_0^{h\wedge\theta} e^{-\rho_s} V'(X_s) \; dW_s.$$

O processo estocástico

$$Y_h = \int_0^{h\wedge\theta} e^{-\rho_s} V'(X_s) \; dW_s$$

é uma martingala e $\mathbb{E}(Y_h) = 0$.

$$E_h := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{h \wedge \theta} e^{-\rho s} \Big(r(X_s)V(X_s) - V'(X_s)\alpha(X_s) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} V''(X_s)\sigma(X_s)^2 - \Pi(X_s) \Big) \, ds \right] = 0.$$

Tomando $\lim_{h \to 0} \frac{E_h}{h} = 0$,

$$r(x)v(x) - v'(x)\alpha(x) - \frac{1}{2} v''(x)\sigma(x)^2 - \Pi(x) = 0.$$

$$\alpha, r, \Pi : I \to \mathbb{R}, \quad \sigma : I \to \mathbb{R}^+, \quad I =]m, M[\neq \emptyset$$

$$X : dX_t = \alpha(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

$$\widehat{\tau} = \arg\max \mathbb{E}_x \int_0^{\tau} e^{-\rho_s} \Pi(X_s) \; ds$$

$$\rho_t = \int_0^t r(X_s) \; ds, \quad 0 \leq t \leq \tau_I$$

Hipótese 1

$\frac{1}{\sigma^2}$, $\frac{\alpha}{\sigma^2}$ e $\frac{r}{\sigma^2}$ são localmente integrável em relação à medida de Lebesgue em I.

Hipótese 2

$\frac{\Pi}{\sigma^2}$ é localmente integrável em relação à medida de Lebesgue em I.
Os conjuntos $\{x \in I : \Pi(x) > 0\}$ e $\{x \in I : \Pi(x) < 0\}$ têm medida de Lebesgue positiva e

$$\mathbb{E}_x \int_0^{\tau_I} e^{-\rho_t} \Pi^+(X_t)\, dt \; < +\infty.$$

Função valor

$$V(x) = \sup_{\tau} \mathbb{E}_x \int_0^{\tau} e^{-\rho_s} \Pi(X_s)\ ds$$

$$r(x)v(x) - \alpha(x)v'(x) - \frac{\sigma(x)^2}{2} v''(x) - \Pi(x) = 0$$

$$w'(x) = A(x)w(x) + b(x) \longrightarrow \Phi_a(x) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(a,x) & \phi_{12}(a,x) \\ \phi_{21}(a,x) & \phi_{22}(a,x) \end{bmatrix}.$$

Função valor

$$v(x) = v(a)\phi_{11}(a,x) + v'(a)\phi_{12}(a,x) - \int_a^x \frac{2\Pi(z)}{\sigma(z)^2}\phi_{12}(z,x)\ dz$$

$$v^{[a,b]}(x) = \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{2\Pi(z)}{\sigma(z)^2}\phi_{12}(z,b)\ dz}{\phi_{12}(a,b)}\phi_{12}(a,x) - \int_a^x \frac{2\Pi(z)}{\sigma(z)^2}\phi_{12}(z,x)\, dz$$

B.V.P. $v(a) = v(b) = 0.$

Teorema

Seja $\{]a_k, b_k[,\ k = 1, 2, ...\}$ a coleção de todos os intervalos maximais para a condição

$$a < b\ ,\quad v^{[a,b]}(x) > 0\ \ \forall\ x \in\ ]a, b[.$$

Tem-se

$$V(x) = \begin{cases} v^{[a_k,b_k]}(x) & para\ x \in]a_k, b_k[,\ k = 1, 2, ... \\ 0 & para\ x \in I \setminus \bigcup_k\ ]a_k, b_k[. \end{cases}$$

O tempo de paragem $\tau = \inf\{t \geq 0 : V(X_t) = 0\} \wedge \tau_I$ é ótimo.

Horizonte Finito

Sejam Π, α, σ funções contínuas e $T > 0$ fixo.

$$dX_t = \alpha(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

$$V(t,x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}_x \int_t^{\tau \wedge T} e^{-\rho_s} \Pi(X_s)\ ds,$$

$$\rho_h = \int_t^h r(X_s)\ ds, \qquad 0 \leq t \leq h < \tau_I \wedge T.$$

Sejam x, t, ϵ tais que $V(t,x) > 0$ e $V(t,z) > 0$ sempre que $|x - z| < \epsilon$. Considere-se:

$$\theta = \inf\{s \geq t : |X_s - x| \geq \epsilon\} \wedge T.$$

$$\min\left\{r(x)v(t,x) - v_t(t,x) - v_x(t,x)\alpha(x) - \frac{1}{2}v_{xx}(t,x)\sigma(x)^2 - \Pi(x),\right.$$

$$\left. v(t,x)\right\} = 0.$$

Problema Multidimensional

Sejam $\Pi, \alpha, \sigma_1, \sigma_2, u, v$ funções contínuas e $T > 0$ fixo.

$$dR_t = u(R_t)dt + v(R_t)dW_{2,t}$$

$$dX_t = \alpha(X_t, R_t)dt + \sigma_1(X_t, R_t)dW_{1,t} + \sigma_2(X_t, R_t)dW_{2,t},$$

$$V(t,x,r) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}_{x,r} \int_t^{\tau \wedge T} e^{-\rho_s} \Pi(X_s)\ ds,$$

$$\rho_h = \int_t^h R_s\ ds, \qquad 0 \leq t \leq h < \tau_I \wedge T.$$

Problema Multidimensional

Sejam $x, r, t, \epsilon, \delta$ tais que $V(t,x,r) > 0$ e $V(t,y,z) > 0$ sempre que $|y-x| < \epsilon$ e $|z-r| < \delta$. Considere-se:

$$\theta = \inf\{s \geq t : |X_s - x| \geq \epsilon \vee |R_s - r| \geq \delta\} \wedge T.$$

$$\min \Big\{ rV(t,x,r) - V_t(t,x,r) - V_x(t,x,r)\alpha(x,r) - V_r(t,x,r)u(r) \\ -\frac{1}{2}V_{xx}(t,x,r)\left[\sigma_1(x,r)^2 + \sigma_2(x,r)^2\right] - \frac{1}{2}V_{rr}(t,x,r)v(r)^2 \\ -V_{rx}(t,x,r)\sigma_2(x,r)v(r) - \Pi(x), \quad V(t,x,r) \Big\} = 0.$$

Método Numérico

Método das Diferenças Finitas

$$v_t(t,x) \leq r(x)v(t,x) - \alpha(x)v_x(t,x) - \frac{\sigma(x)^2}{2}v_{xx}(t,x) - \Pi(x),$$
$$v(t,x) \geq 0,$$

com igualdade em pelo menos uma das equações e condição na fronteira: $v(T,x) = 0$.

Método das Diferenças Finitas

$$v_t(t,x) \leq r(x)v(t,x) - \alpha(x)v_x(t,x) - \frac{\sigma(x)^2}{2}v_{xx}(t,x) - \Pi(x),$$
$$v(t,x) \geq 0,$$

com igualdade em pelo menos uma das equações e condição na fronteira: $v(T,x) = 0$.

Fórmula de Taylor

$$f(t-\Delta t, x) = f(t,x) - \Delta t \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + O\left[(\Delta t)^2\right]$$
$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \approx \frac{f(t,x) - f(t-\Delta t, x)}{\Delta t}.$$

Método das Diferenças Finitas

Notação

$$
\begin{aligned}
&\Delta t = \frac{T}{N}, \qquad \Delta x = \frac{K}{M},\\
&t_i = t_0 + i\Delta t, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, N,\\
&x_j = x_0 + j\Delta x, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, M,\\
&\Pi_j = \Pi(x_j),\ r_j = r(x_j),\ \alpha_j = \alpha(x_j),\ \sigma_j = \sigma(x_j),\ \ j = 0, 1, 2, \ldots, M,\\
&v_{i,j} = v(t_i, x_j), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, N,\ \ j = 0, 1, 2, \ldots, M.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{N,j} &= 0;\\
\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta t} &\le r_j v_{i+1,j} - \alpha_j \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j}}{\Delta x} -\\
&\quad - \frac{\sigma_j^2}{2} \frac{v_{i+1,j+1} - 2v_{i+1,j} + v_{i+1,j-1}}{(\Delta x)^2} - \Pi_j.
\end{aligned}
$$

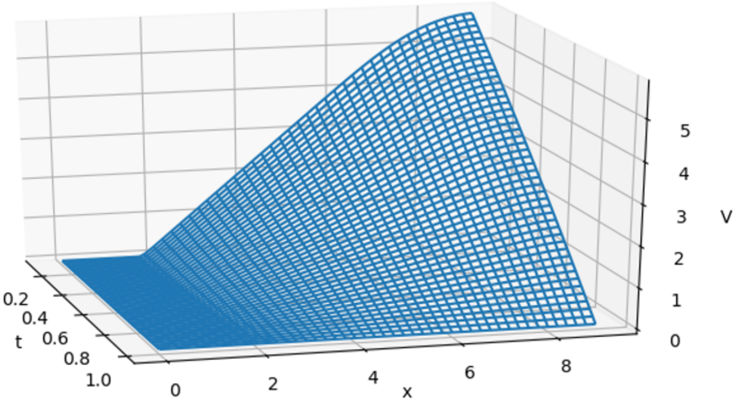
Método das Diferenças Finitas

$$v_{i,j} = \max\left\{ v_{i+1,j} - \Delta t\left(r_j v_{i+1,j} - \alpha_j \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j}}{\Delta x} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\sigma_j^2}{2} \frac{v_{i+1,j+1} - 2v_{i+1,j} + v_{i+1,j-1}}{(\Delta x)^2} - \Pi_j \right), 0 \right\}.$$

$$\left(Id - \Delta t \left(R - \frac{1}{\Delta x} A - \frac{1}{(\Delta x)^2} B \right) \right) v_{i+1} + \Delta t \Pi.$$

Método das Diferenças Finitas



$$\alpha(x) = 0.3x \quad \sigma(x) = 0.1x \quad \Pi(x) = x - 2 \quad r(x) \equiv 0.2$$

Bibliografia

- Ames, W.F., (1977) Numerical methods for partial differential equations (2ed).
- Ferguson, T., Optimal Stopping and Applications, Manuscript.
- Ferguson, T., Finite Horizon Problems, Manuscript.
- Guerra, M., Nunes, C., Oliveira, C., (2020) Optimal stopping of one-dimensional diffusions with integral criteria, J. Math.Anal.Appl.481(2020) 123473.
- Peskir, G., Shiryaev, A., (2006) Optimal stopping and free-boundary problems.