Matemática Financeira: Pricing de Opções Financeiras

Elisabete Fino (ISEG - Universidade de Lisboa)

Orientador: Prof. Manuel Guerra

Fundação Calouste Gulbenkian: Bolsa Novos Talentos em Matemática

O que é uma opção?

Contrato que dá ao seu comprador o direito, mas não a obrigação, de transacionar um certo ativo numa data futura, por um certo preço (strike price).

Logo, existem duas partes envolvidas:

(A) **Writer**: Entidade que vende a opção. É responsável por garantir que a transação pode ser efetuada no momento oportuno e recebe uma compensação monetária por essa responsabilidade.

(B) **Holder**: Entidade que compra a opção. Tem o direito a decidir se a transação do ativo subjacente é ou não efetuada e paga um preço por esse direito.

O que é uma opção?

Existem diversos tipos de opções, tais como:

1. **Call**: Opção de compra
2. **Put**: Opção de venda

1. **Opção Europeia**: A transação só pode ser efetuada na data de maturidade.
2. **Opção Americana**: A transação pode ser efetuada em qualquer momento até à maturidade.
3. **Opções Exóticas**: Contratos híbridos que podem ser personalizados tendo em conta as necessidades do investidor.

Opções são instrumentos financeiros que podem ser utilizados para mitigação de risco, protegendo os agentes contra flutuações nos preços dos ativos.

Payoff de uma opção

Vantagem obtida ao exercer uma opção.

- Sempre positivo (opção = direito mas não obrigação)
- Opção de compra europeia: $(S_T - K)^+$
- Opção de venda europeia: $(K - S_T)^+$

Notação

O contrato é válido no intervalo de tempo $[0, T]$

S_t: Preço do ativo subjacente no momento t

K: Strike price

Pricing de uma opção - Conceitos

Oportunidade de Arbitragem

Estratégia de investimento que traz um lucro positivo sem que exista um investimento inicial ou um risco associado.

Seja X o processo estocástico correspondente ao preço descontado do ativo subjacente ie o preço do ativo subjacente em unidades de um outro ativo que não tem risco associado.

Propriedade de martingala

$$X_s = E_Q[X_t|\mathcal{F}_s], 0 \leq s \leq t \leq T$$

Se o processo X verificar a propriedade de martingala, então dizemos que a medida de probabilidade Q sobre $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ é uma **medida de martingala**.

Pricing de uma opção - Conceitos

Uma medida de martingala Q diz-se uma **medida de martingala equivalente** se é equivalente à medida original P sobre $\mathcal{F}_T$.
Se a medida de martingala equivalente for única, o mercado diz-se **completo**.

Teorema Fundamental do Pricing de Ativos

O modelo de mercado é livre de oportunidades de arbitragem se e só se o conjunto de todas as medidas de martingala equivalentes é não vazio.

Para obter o preço justo de uma opção, a metodologia geral utilizada é proceder à criação de um portefólio que replique a opção, isto é, que que tenha no momento T um valor igual ao seu payoff.

Como não existem oportunidades de arbitragem, dois ativos com o mesmo valor no futuro deverão ter o mesmo preço. Logo, se soubermos o valor, neste momento, de um portefólio que replica a opção, esse valor será igual ao preço dessa mesma opção.

Pricing de uma opção - Método

Devemos começar por modelar a evolução do preço do ativo subjacente.

- Tempo discreto (exemplo: Modelo binomial)
- Tempo contínuo (utilização de SDEs para modelar a evolução do preço)

Pricing de uma opção: Modelo Black-Scholes

Evolução do preço do ativo subjacente

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Notação

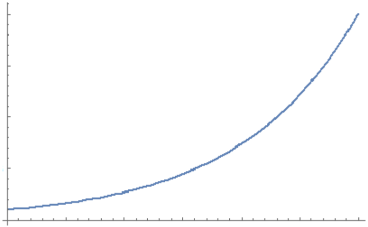
S_t - Preço do ativo subjacente no momento t

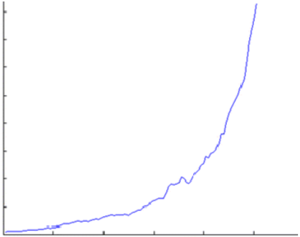
σ - Volatilidade do processo de preço do ativo subjacente

W_t - Movimento Browniano standard

Pricing de uma opção: Modelo Black-Scholes

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$





Pricing de uma opção: Modelo Black-Scholes

Evolução do preço do ativo subjacente

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Notação

S_t - Preço do ativo subjacente no momento t

σ - Volatilidade do processo de preço do ativo subjacente

W_t - Movimento Browniano standard

Movimento Browniano

Processo estocástico a tempo contínuo, $B(t) : t \in [0, \infty]$, tal que:

- $B(0) = 0$
- $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n, B(t_1) - B(t_0), ..., B(t_n) - B(t_{n-1})$ são variáveis aleatórias independentes
- $\forall t \geq 0, h > 0, B(t+h) - B(t) \sim N(0, h)$
- As trajetórias $t \mapsto B(t)$ são contínuas $P - q.t.p$

Pricing de uma opção: Modelo Black-Scholes

O preço de uma opção de compra europeia no momento t é dado por

$$C(S,t) = S_t \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2)$$

onde

$$d_1 = \frac{log(\frac{S_t}{K}) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma(T-t)}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma(T-t)$$

Observações:

- O preço da opção não depende de μ
- A volatilidade, σ, é considerada constante
- A volatilidade, σ, é o único parâmetro na fórmula de pricing que não é diretamente observável

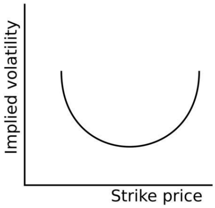
Volatilidade Implícita

Os dados de mercado permitem observar o preço de mercado de opções transacionadas anteriormente, bem como as respetivas maturidades e strike prices.
Podemos inserir estes valores na fórmula de pricing e obter a **volatilidade implícita**.

A análise estatística dos preços de mercado sugere fortemente que a volatilidade, σ, não é constante.

Volatility Smile

Quando é desenhado o gráfico da volatilidade implícita em função dos preços obtém-se frequentemente um gráfico em forma de sorriso (smile), significando que a volatilidade tende a aumentar quanto mais a opção está in the money ou out of the money.



Surge então uma nova classe de modelos, considerando **Volatilidade Estocástica** ie permitindo que a volatilidade varie aleatoriamente ao longo do tempo.

Renault (1997) confirma que volatilidades em forma de sorriso emergem naturalmente nos modelos de volatilidade estocástica.

Pricing de uma opção: O modelo de Heston

Evolução do preço do ativo subjacente

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v(t)} S_t dW_t^1$$

Evolução da volatilidade

$$dv(t) = \kappa[\theta - v(t)]dt + \sigma \sqrt{v(t)} dW_t^2$$

Notação

S_t - Preço do ativo subjacente no momento t

$\sqrt{v(t)}$ - Volatilidade do processo de preço do ativo subjacente

W_t^i - Movimento Browniano Standard, $i = 1, 2$

W_t^1 e W_t^2 têm correlação ρ

Sob certas condições pode mostrar-se que o preço de uma opção de compra europeia é dado por

$$C(S, v, t) = SP_1 - Ke^{-r(T-t)}P_2$$

onde r é a taxa de juro e P_1, P_2 devem satisfazer

$$\frac{1}{2}v\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2}+\rho\sigma v\frac{\partial^2 P_j}{\partial x\partial v}+\frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2}+(r+u_j v)\frac{\partial P_j}{\partial x}+(a-b_j v)\frac{\partial P_j}{\partial v}-\frac{\partial P_j}{\partial t}=0$$

para $j = 1, 2$ com $x = log[S]$,$u_1 = 1/2$, $u_2 = -1/2$, $a = \kappa\theta$, $b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma$, $b_2 = \kappa + \lambda$ sujeito a

$$P_j(x, v, T; log[K]) = 1_{x \geq log[K]}$$

$\rightsquigarrow$ Tanto no modelo de Black-Scholes como o modelo de Heston, maior variância implica um preço mais elevado para todas as opções.

Os efeitos da Volatilidade Estocástica

No que respeita ao modelo de Heston, sob probabilidades risk-neutral (medida de martingala), temos

$$dv(t) = \kappa^*[\theta^* - v(t)]dt + \sigma\sqrt{v(t)}dW_t^2$$

onde

$$\kappa^* = \kappa + \lambda \text{ and } \theta^* = \frac{\kappa\theta}{\kappa+\lambda}$$

sendo λ um parâmetro referente ao preço do risco associado à volatilidade.

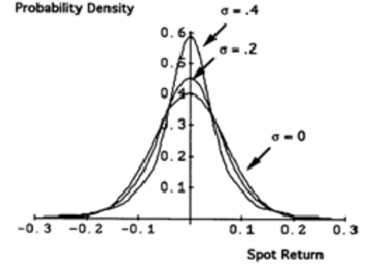
Analisar o modelo nesta forma permite-nos obter algumas conclusões interessantes.

Os efeitos da Volatilidade Estocástica

$\rightsquigarrow$ A variância tende a reverter para uma média de θ^* e a velocidade a que tal acontece é determinada por κ^*.

$\rightsquigarrow$ Volatilidade da volatilidade, σ:

- Se $\sigma = 0$, então a volatilidade do ativo é determinística e os spot returns têm uma distribuição normal;
- Caso contrário, σ faz aumentar a curtose dos spot returns.



Os efeitos da Volatilidade Estocástica

$\rightsquigarrow$ Os spot returns têm distribuição assintoticamente normal com variância por unidade de tempo dada por θ^*

$\hookrightarrow$ Poderia ser interpretado como um indicador de que o modelo Black-Scholes tem bons resultados para opções de longa duração. Contudo, este modelo ainda assim não considera o risco de exposição a alterações da volatilidade, que é incorporado na média θ^* pelas probabilidades risk-neutral.

Modelo de Heston: Vantagens e limitações

O modelo de Heston, por incluir **volatilidade estocástica**, permite a representação de uma larga variedade de efeitos que o modelo de Black-Scholes não reflete, apesar de ser bastante utilizado.

No entanto, o modelo de Heston apresenta algumas dificuldades:

- Os parâmetros do modelo têm de ser estimados a partir dos dados de mercado.
- São necessários métodos numéricos para resolver os PDEs envolvidos.
- Alguns autores sugerem que, para melhorar a qualidade dos resultados a curto prazo, deveriam ser incluídos "saltos" no modelo.

Outros tópicos sobre volatilidade estocástica: Saltos

Muitos modelos de volatilidade estocástica consideram que o processo de preço do ativo subjacente é contínuo.

No entanto, empiricamente verificam-se saltos instantâneos neste processo quando nova informação importante é incorporada no mercado, como alterações macroeconómicas, o anúncio de novas políticas monetárias ou mesmo a publicação do relatório de contas de uma empresa.

Bates (1996) documenta a necessidade de incluir saltos em modelos de volatilidade estocástica para o pricing de derivados, pelo menos quando a volatilidade é considerada Markoviana.

Propriedade de Markov

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n)$$

Esta propriedade diz-nos que o futuro só depende do momento presente, não existindo, portanto, memória do passado.

Por outro lado, a inclusão de saltos pode conduzir a problemas ao fazer com que o mercado deixe de ser completo.

Outros tópicos sobre volatilidade estocástica: Memória Longa

Modelos em que a volatilidade é dada por um SDE simples conduzido por um movimento Browniano têm subjacente que a volatilidade spot é Markoviana.

Contudo verifica-se empiricamente que a dependência na estrutura da volatilidade tende a diminuir lentamente quando são usados dados de elevada frequência e lags mais compridos, sugerindo que a volatilidade segue um processo de memória longa.

Porém, a inclusão de memória longa nos modelos pode levantar problemas relativos à existência de oportunidades de arbitragem.

Outros tópicos sobre volatilidade estocástica: Clustering de volatilidade

Este fenómeno foi inicialmente notado por Mandelbrot (1963).

Consiste na observação de que, geralmente, grandes variações de preços são seguidas de grandes variações e pequenas variações são seguidas de pequenas variações.

ISEG

Lisbon School of Economics & Management

Universidade de Lisboa

LISBOA

UNIVERSIDADE DE LISBOA

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN