Funções Trigonométricas

Grupo de Matemática da Universidade Técnica de Lisboa:
António St. Aubyn, Maria Carlos Figueiredo,
Luís de Loura, Luísa Ribeiro, Francisco Viegas

Lisboa, Março de 2004

O documento presente foi obtido directamente do código TeX fornecido pelos autores com alterações de formatação. A versão corrente é de 4 de Novembro de 2005. A revisão deste texto do ponto de vista gráfico ainda não está completa. Novas versões poderão ficar disponíveis no futuro a partir de http://preprint.math.ist.utl.pt/files/ppgmutltrig.pdf. O DMIST agradece ao Grupo de Matemática da UTL a possibilidade de facultar o texto aos alunos das disciplinas introdutórias de Matemática do IST.

Conteúdo

1 O círculo trigonométrico

Uma das formas elementares de introduzir as funções trigonométricas é utilizar o chamado círculo trigonométrico. Foi, aliás, desta maneira que as referidas funções foram estudadas no ensino secundário.

Chamamos círculo trigonométrico a uma circunferência[1] de raio 1 centrada na origem de um referencial ortonormado directo no plano $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Relembramos que um referencial $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ do plano se diz ortonormado directo sse os vectores[2] $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ tiverem igual comprimento e o ângulo orientado de $\mathbf{e}_1$ para $\mathbf{e}_2$ for um ângulo recto, orientado no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Na figura 1 representamos o referencial $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ e o círculo trigonométrico, que designaremos por C.

Designemos por ξ e η as coordenadas de um ponto genérico Q do plano no referencial $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Relembrando que a equação de uma circunferência centrada na origem O do referencial e com raio $R > 0$ é $\xi^2 + \eta^2 = R^2$, vemos que o ponto Q pertence ao círculo trigonométrico sse

$$\xi^2 + \eta^2 = 1 \tag{1}$$

A condição (1) é, portanto, a equação do círculo trigonométrico[3].

[1] Seria mais razoável usar o termo circunferência trigonométrica mas, por tradição, círculo trigonométrico é o termo usado.

[2] Por convenção, escreveremos os vectores em letra escura não itálica.

[3] Não esquecer que se trata de uma circunferência!

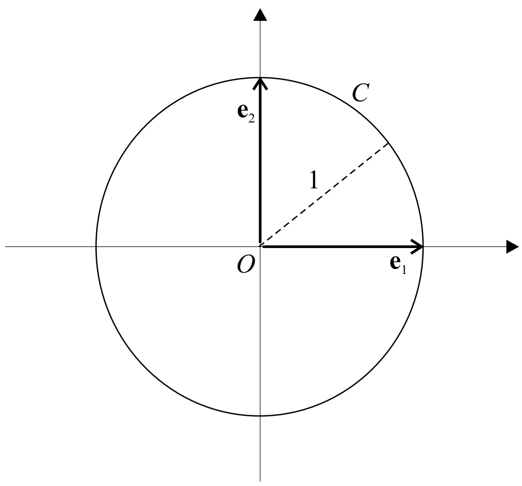

Figura 1: Círculo trigonométrico.

Seja x um número real qualquer; vamos associar ao número x um ponto P do círculo trigonométrico. Para isso, consideramos, tal como indicado na figura 2, o ângulo orientado[4] θ cuja medida em radianos é x. Esse ângulo determina uma semi-recta a partir da origem O do referencial, que intersecta o círculo trigonométrico num único ponto. É precisamente esse o ponto P que, por definição, associamos ao número real x.

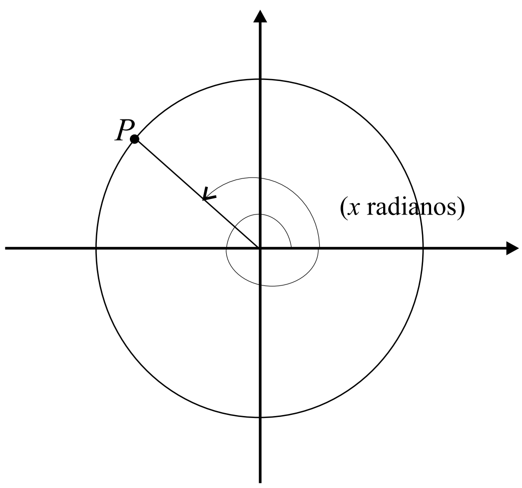

Figura 2: O ponto P associado ao número real x.

Note-se que, do ponto de vista formal, acabámos de definir uma aplicação Ψ que, a cada número real x, associa o ponto P do círculo trigonométrico

[4]Relembramos que o sentido positivo é o contrário ao dos ponteiros do relógio.

construído da forma descrita:

$$\Psi : \mathbb{R} \to C.$$

A função Ψ é obviamente sobrejectiva porque, dado um ponto P qualquer do círculo trigonométrico, é possível (e muito fácil) determinar um número real x tal que $P = \Psi(x)$, por outras palavras, tal que P seja o ponto associado a x pelo processo descrito no início. De facto, basta considerar a semi-recta OP, determinar um ângulo orientado θ que ela faça com o vector $\mathbf{e}_1$, e tomar para x a medida, em radianos, desse ângulo θ (ver figura 2).

No entanto a função Ψ não é injectiva. De facto, suponhamos que o ponto P do círculo trigonométrico está associado a um certo número x, ou seja, que $P = \Psi(x)$. Isto significa que um ângulo orientado entre o vector $\mathbf{e}_1$ e a semi-recta OP mede x radianos. Mas então um outro ângulo orientado entre $\mathbf{e}_1$ e a semi-recta OP mede, por exemplo, $x + 2\pi$ radianos, visto que um ângulo de 2π radianos corresponde a uma volta completa no círculo trigonométrico. Consequentemente o ponto P está também associado ao número real $x + 2\pi$, ou seja, $P = \Psi(x + 2\pi)$. Das igualdades

$$P = \Psi(x) = \Psi(x + 2\pi)$$

concluímos que Ψ não é injectiva.

Pode agora pôr-se a questão: dado um ponto P do círculo trigonométrico, a que números reais estará P associado? Por outras palavras, quais os números x tais que $P = \Psi(x)$? Para responder a esta questão, designemos por θ um ângulo orientado entre $\mathbf{e}_1$ e a semi-recta OP. Sendo α a medida, em radianos, do ângulo θ, tem-se $P = \Psi(\alpha)$. Todos os outros ângulos entre $\mathbf{e}_1$ e a semi-recta OP diferem de θ por um valor correspondente a um número inteiro de voltas completas no círculo trigonométrico. Como uma volta mede 2π radianos, todos os outros ângulos entre $\mathbf{e}_1$ e a semi-recta OP têm uma medida (em radianos) que difere da de θ por um múltiplo inteiro de 2π. Quer isto dizer que a medida x, em radianos, de qualquer um desses ângulos é igual a α mais um múltiplo inteiro de 2π; por outras palavras, existe um número inteiro K tal que x é igual a $2K\pi + \alpha$:

$$\exists K \in \mathbb{Z} \quad x = 2K\pi + \alpha. \tag{2}$$

Acabámos de ver que, se P é um ponto do círculo trigonométrico associado ao número real α (o que significa $P = \Psi(\alpha)$), então P está associado ao número real x (ou seja, $P = \Psi(x)$) sse a condição (2) for verificada. Dito de outra forma, $\Psi(x) = \Psi(\alpha)$ sse a condição (2) for verificada.

No estudo da trigonometria é usual abreviar a escrita da condição (2), omitindo o quantificador existencial. Assim, em vez de (2), escreveremos, com o mesmo sentido,

$$x = 2K\pi + \alpha. \tag{3}$$

Já mostrámos que $\Psi(x) = \Psi(\alpha)$ sse a condição (3) for verificada.

Há que ter alguma atenção com a notação (3). O significado de (3) é, por convenção, o de (2): existe um inteiro K tal que $x = 2K\pi + \alpha$. Assim, por exemplo, a condição (3) é equivalente a

$$x = -2K\pi + \alpha. \tag{4}$$

De facto $x = -2K\pi + \alpha$ pode escrever-se na forma $x = 2(-K)\pi + \alpha$ e, como quando K percorre o conjunto dos inteiros o mesmo sucede a $-K$, as condições (3) e (4) são equivalentes (não esquecendo que, por convenção de linguagem, cada uma delas pressupõe um quantificador existencial na variável K).

Um outro tipo de notação abreviada, muito usado no estudo da trigonometria, é o que passamos a expor. Consideremos a seguinte condição:

$$(\exists K \in \mathbb{Z} \quad x = -2K\pi + \alpha) \quad \vee \quad (\exists K \in \mathbb{Z} \quad x = -2K\pi - \alpha)\,. \tag{5}$$

De acordo com a convenção já feita, cada uma das condições que se encontram entre parênteses, pode ser escrita omitindo o quantificador existencial. Assim, (3) é equivalente a

$$x = -2K\pi + \alpha \quad \vee \quad x = -2K\pi - \alpha. \tag{6}$$

É usual abreviar a escrita de (6) para

$$x = -2K\pi \pm \alpha. \tag{7}$$

Cuidado na leitura de (7)! De acordo com as convenções feitas, o sinal $\pm$ significa uma disjunção. Logo (7) é uma abreviatura de (6); mas, por sua vez, $x = -2K\pi + \alpha$ e $x = -2K\pi - \alpha$ são abreviaturas, respectivamente, de $\exists K \in \mathbb{Z}\ x = -2K\pi + \alpha$ e de $\exists K \in \mathbb{Z}\ x = -2K\pi + \alpha$, pelo que (6) significa (5).

Convem, nesta altura, o leitor familiarizar-se com este tipo de notações. Para o ajudar nessa tarefa daremos mais alguns exemplos.

Exemplo 1. Consideremos os pontos P e Q do círculo trigonométrico representados na figura 3.

Como determinar todos os números reais x tais que P ou Q estão associados a x? Por outras palavras, quais os valores de x tais que $P = \Psi(x)$ ou

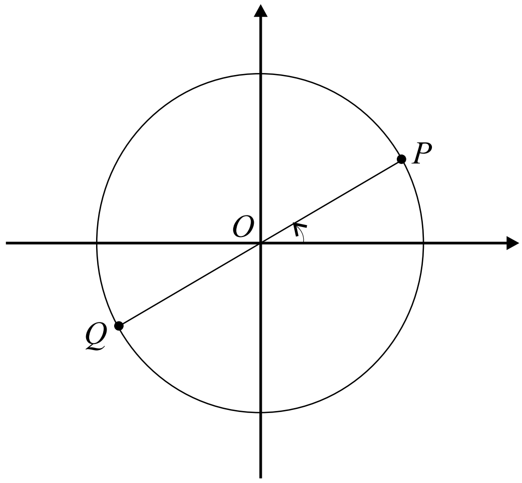

Figura 3: Exemplo 1.

$Q = \Psi(x)$? Como sabemos, pela figura 3, que $P = \Psi(\alpha)$ e $Q = \Psi(\pi + \alpha)$, vem, por (3),

$$x = 2K\pi + \alpha \quad \vee \quad x = 2K\pi + \pi + \alpha. \tag{8}$$

A primeira destas condições diz-nos que a diferença entre x e α é um múltiplo inteiro de 2π, ou, o que é o mesmo, que é um múltiplo inteiro par de π. A segunda condição, que se pode escrever $x = (2K + 1)\pi + \alpha$, diz-nos que a diferença entre x e α é um múltiplo inteiro ímpar de π. A disjunção das duas condições, que é precisamente (8), diz-nos que a diferença entre x e α é um múltiplo inteiro par de π ou um múltiplo inteiro ímpar de π; mas isto quer dizer que a diferença entre x e α é um múltiplo inteiro (qualquer) de π, ou seja, x é da forma $K\pi + \alpha$. Acabámos de mostrar que (8) é equivalente a

$$x = K\pi + \alpha. \tag{9}$$

Exemplo 2. Consideremos os pontos P e Q do círculo trigonométrico representados na figura 4 e determinemos todos os números reais x tais que P ou Q estão associados a x, ou seja, tais que $P = \Psi(x)$ ou $Q = \Psi(x)$.

Sabemos, pela figura 4, que $P = \Psi(\alpha)$ e $Q = \Psi(\pi - \alpha)$. Por consequência, tendo em conta (3),

$$x = 2K\pi + \alpha \quad \vee \quad x = 2K\pi + \pi - \alpha. \tag{10}$$

A primeira condição diz-nos que x é obtido somando um múltiplo par de π ($2K\pi$) a α. A segunda diz-nos que x é obtido fazendo a diferença entre um múltiplo ímpar de π ($(2K + 1)\pi$) e α. A fórmula (10) pode então ser abreviada para

$$x = K\pi + (-1)^K\alpha. \tag{11}$$

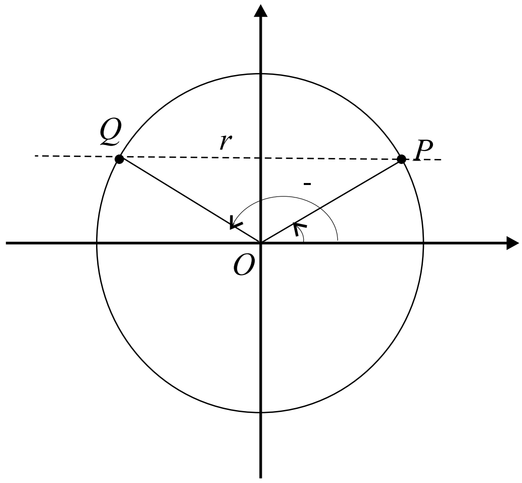

Figura 4: Exemplo 2.

Exemplo 3. Consideremos os pontos P e Q do círculo trigonométrico representados na figura 5 e determinemos todos os números reais x tais que P ou Q estão associados a x, ou seja, tais que $P = \Psi(x)$ ou $Q = \Psi(x)$.

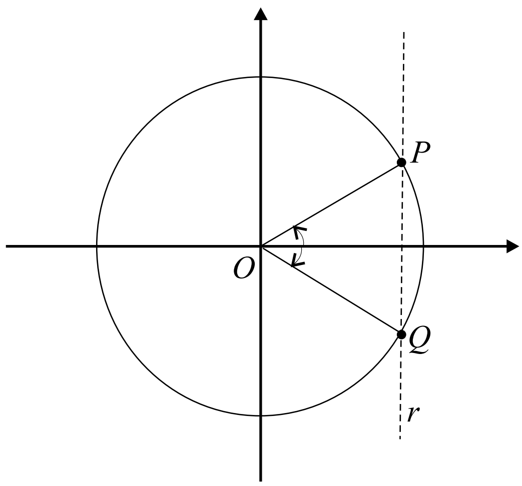

Figura 5: Exemplo 3.

Sabemos, pela figura 5, que $P = \Psi(\alpha)$ e $Q = \Psi(-\alpha)$. Por consequência, tendo em conta (3),

$$x = 2K\pi + \alpha \quad \vee \quad x = 2K\pi - \alpha. \tag{12}$$

Tendo em conta a convenção de notação introduzida em (7), vemos que (12) é equivalente a

$$x = 2K\pi \pm \alpha. \tag{13}$$

2 Função seno

Nesta secção introduziremos o seno de um número real x, recorrendo ao círculo trigonométrico, tal como foi feito no ensino secundário. Em seguida estudaremos algumas propriedades da função seno.

Para definir o seno do número real x começamos, tal como indicado na figura 6, por considerar o ângulo orientado θ cuja medida em radianos é x. Em seguida consideramos o ponto P do círculo trigonométrico associado ao número x, ou seja, tal que $P = \Psi(x)$. Finalmente o seno de x é a ordenada do ponto P no referencial ortonormado onde está inserido o círculo trigonométrico[5].

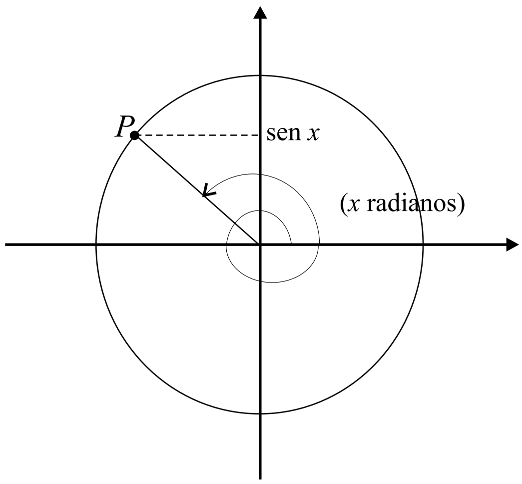

Figura 6: O seno de x.

Desta forma associamos, a cada número real x, um outro número real a que chamamos o seno de x. O que estamos a fazer não é mais do que definir uma função, a que chamaremos função seno (usualmente designada por sen), que associa a cada número real x o valor do seno de x definido pelo processo descrito.

A função seno tem por domínio o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, uma vez que o processo descrito para calcular o seno de x se pode aplicar a qualquer número real. O contradomínio da função seno é o conjunto das ordenadas dos pontos do círculo trigonométrico, ou seja, o intervalo $[-1, 1]$. Na notação usual para funções, podemos portanto escrever:

$$\text{sen} : \mathbb{R} \to [-1, 1].$$

[5]Note-se que o valor do seno de x assim definido é independente do referencial ortonormado directo escolhido.

Para alguns valores de x é muito fácil, recorrendo ao círculo trigonométrico, determinar o seno de x; por exemplo:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen} 0 = 0; & \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} = 1; & \operatorname{sen} \pi = 0; \\ \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{2} = -1; & \operatorname{sen}(2\pi) = 0; & \operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1. \end{array}$$

Também é fácil determinar os valores da função seno nos pontos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$. Consideremos o número real $\frac{\pi}{6}$; para calcular o seu seno devemos recorrer ao círculo trigonométrico, tal como representado na figura 7, e determinar a ordenada do ponto P, que, neste caso, é o comprimento do segmento PR.

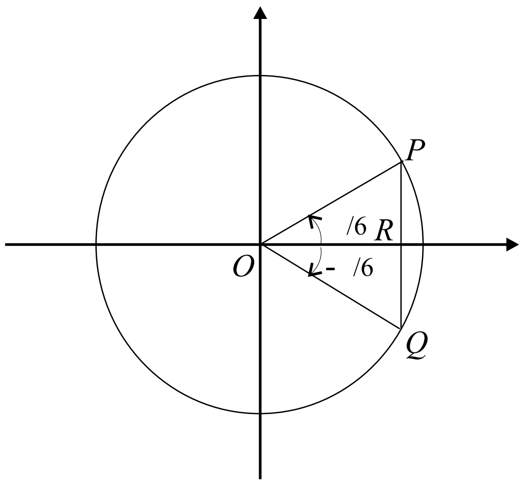

Figura 7: O seno de $\dfrac{\pi}{6}$.

Ora, por construção, os ângulos $\angle OPQ$ e $\angle OQP$ são iguais e a sua soma mede $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ radianos, porque a soma dos ângulos de um triângulo é sempre igual a π radianos. Logo cada um dos ângulos $\angle OPQ$ e $\angle OQP$ mede $\frac{\pi}{3}$ radianos, o que prova que o triângulo ΔOPQ é equilátero. Consequentemente, a medida do lado PQ é igual à do lado OP (e também à do lado OQ), cujo comprimento é 1, por ser o raio do círculo trigonométrico. Como, por construção, os triângulos ΔOPR e ΔOQR são geometricamente iguais, concluímos que os segmentos PR e QR têm o mesmo comprimento, que terá de ser igual a $\frac{1}{2}$. Logo

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Para calcularmos o seno de $\frac{\pi}{4}$ recorremos novamente ao círculo trigonométrico, como representado na figura 8.

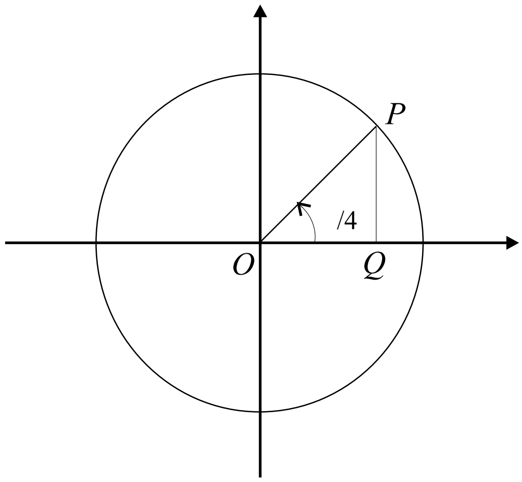

Figura 8: O seno de $\dfrac{\pi}{4}$.

O triângulo ΔOPQ é rectângulo em Q e o ângulo $\angle POQ$ mede $\frac{\pi}{4}$ radianos. Logo o ângulo $\angle OPQ$ também mede $\frac{\pi}{4}$ radianos, pelo que o triângulo ΔOPQ é isósceles. Designando por ξ o comprimento do segmento PQ (que é igual ao do segmento OQ) tem-se, pelo teorema de Pitágoras, $\xi^2 + \xi^2 = 1$, ou seja $\xi^2 = \frac{1}{2}$; daqui se conclui que $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto o seno de $\frac{\pi}{4}$, que é o comprimento do segmento PQ, é dado por

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Calculemos ainda o seno de $\frac{\pi}{3}$, recorrendo à figura 9. Por construção, os triângulos ΔOPQ e ΔORS são geometricamente iguais, pelo que o comprimento do segmento RS é igual ao comprimento do segmento PQ; mas este último é o seno de $\frac{\pi}{6}$, que já sabemos ser igual a $\frac{1}{2}$. Designando por ξ o comprimento do segmento OS, que é precisamente o seno de $\frac{\pi}{3}$, podemos aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo ΔORS, obtendo:

$$\xi^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

Concluímos assim que $\xi^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, ou seja $\xi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Acabámos de demonstrar que:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

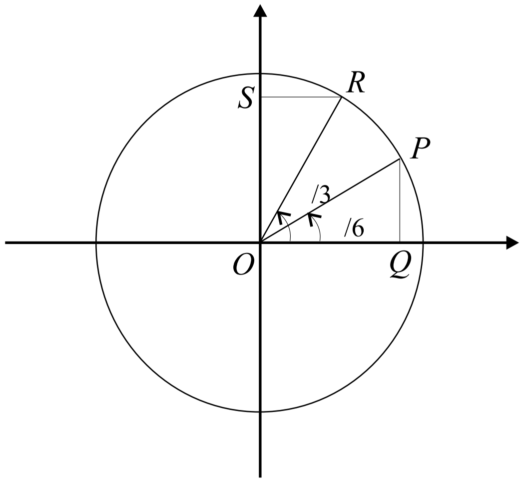

Figura 9: O seno de $\dfrac{\pi}{3}$.

•
• •

Seja x um número real qualquer e seja P o ponto do círculo trigonométrico associado a x, ou seja, tal que $P = \Psi(x)$. Tendo em conta (3), que nos garante que, para todo o K inteiro, $P = \Psi(2K\pi + x)$, vemos que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall K \in \mathbb{Z} \quad \operatorname{sen}(2K\pi + x) = \operatorname{sen} x. \tag{14}$$

Um outro resultado interessante, que se deduz facilmente do círculo trigonométrico, é o seguinte:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x. \tag{15}$$

De facto, como se vê na figura 10, os segmentos PR e QR têm o mesmo comprimento. Ora o comprimento de PR coincide com a ordenada de P que, por definição, é o seno de x; o comprimento de QR coincide com o simétrico da ordenada de Q que, por definição, é o seno de $-x$. Consequentemente a igualdade (15) é verificada[6].

[6]A demonstração, tal como a fizémos, só é válida se o ponto P estiver no 1^o ou no 2^o quadrante; no entanto é fácil adapta-la aos casos em que P pertence ao 3^o ou ao 4^o quadrante.

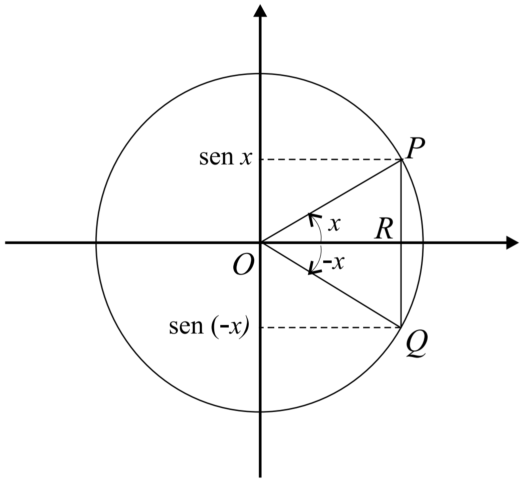

Figura 10: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.

De forma inteiramente análoga se prova as igualdades seguintes:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right);\\
&\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x;\\
&\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x;\\
&\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).
\end{aligned}$$

Mais geralmente, e tendo em conta as propriedades (14) e (15), tem-se

$$\operatorname{sen}(2K\pi - x) = -\operatorname{sen} x \tag{16}$$

$$\operatorname{sen}\left(2K\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{17}$$

$$\operatorname{sen}(2K\pi + \pi + x) = -\operatorname{sen} x \tag{18}$$

$$\operatorname{sen}(2K\pi + \pi - x) = \operatorname{sen} x \tag{19}$$

$$\operatorname{sen}\left(2K\pi + \frac{3\pi}{2} + x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \tag{20}$$

As igualdades (16) a (20) são válidas quaisquer que sejam K pertencente a $\mathbb{Z}$ e x pertencente a $\mathbb{R}$.

•

•   •

Seja $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$; já sabemos que o seno de x é a ordenada do ponto P associado a x ($P = \Psi(x)$), tal como representado na figura 11.

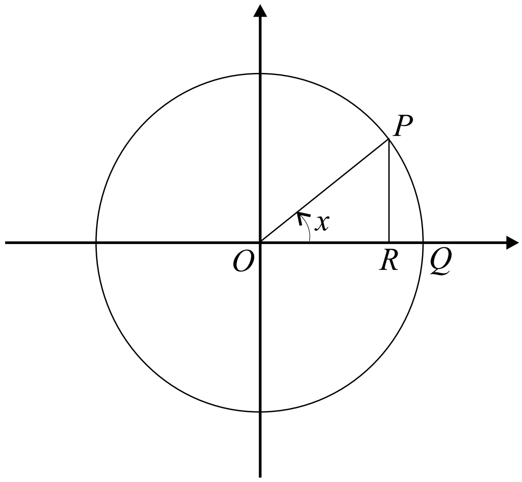

Figura 11: $x \leq \operatorname{sen} x$ sempre que $x \geq 0$.

Como x pertence ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, o seno de x coincide com o comprimento do segmento PR (ver figura 11). O comprimento deste segmento é menor ou igual[7] ao comprimento do arco de círculo trigonométrico PQ. Mas, como o círculo trigonométrico tem raio 1, o comprimento do arco PQ é igual à medida (em radianos) do ângulo ao centro, ou seja, x. Concluímos assim que, para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, se tem $\operatorname{sen} x \leq x$.

No caso de x ser maior do que $\frac{\pi}{2}$, o seno de x é sempre ≤ 1 e o arco correspondente de círculo trigonométrico tem um comprimento maior do que $\frac{\pi}{2}$, número este que é maior do que 1. Em conclusão podemos escrever:

$$\forall x \geq 0 \quad \operatorname{sen} x \leq x. \tag{21}$$

Claro que, se $x \leq 0$, então $-x \geq 0$ e podemos aplicar a $-x$ a desigualdade (21): $\operatorname{sen}(-x) \leq -x$. Utilizando a equação (15), esta desigualdade pode ainda escrever-se $-\operatorname{sen} x \leq -x$, ou, multiplicando esta última desigualdade por -1, $\operatorname{sen} x \geq x$. Portanto:

$$\forall x \leq 0 \quad x \leq \operatorname{sen} x \tag{22}$$

Para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sabemos, por (21), que $\operatorname{sen} x \leq x$. Como, para esses valores de x, o seno de x é ≥ 0, concluímos que $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$. Analogamente, para $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, sabemos, por (22), que $x \leq \operatorname{sen} x$. Mas, para $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, sabemos que o seno de x é ≤ 0, pelo que $|x| = -x \geq -\operatorname{sen} x = |\operatorname{sen} x|$. Para $x \leq -\frac{\pi}{2}$ ou $x \geq \frac{\pi}{2}$ tem-se $|x| \geq \frac{\pi}{2} > 1$; como $|\operatorname{sen} x|$ é sempre ≤ 1, temos

[7] Aliás, só é igual no caso $x = 0$.

também $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$. Acabámos de demonstrar que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\operatorname{sen} x| \leq |x| \tag{23}$$

• • •

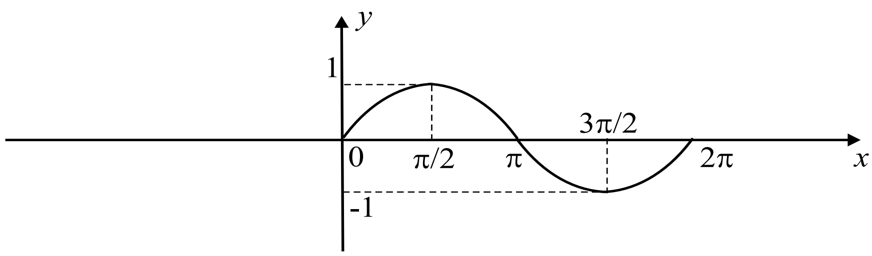

Figura 12: Gráfico da restrição do seno ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Vamos agora esboçar o gráfico da função $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. A função seno assim definida, como função de $\mathbb{R}$ em $[-1, 1]$, é, como já vimos, sobrejectiva; no entanto as igualdades (16) a (20) mostram-nos que não é injectiva. Quando x cresce de 0 até $\frac{\pi}{2}$, o ponto P do círculo trigonométrico (ver figura 6) associado a x percorre, no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, o quarto de círculo trigonométrico que está no primeiro quadrante do referencial $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Vemos assim que o seno de x, que é a ordenada de P, cresce de 0 até 1. Quando x cresce de $\frac{\pi}{2}$ até π, o ponto P percorre, no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, o quarto círculo trigonométrico que está no segundo quadrante do referencial, pelo que o seno de x decresce de 1 até 0. Utilizando a igualdade $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + x) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$, que é a fórmula (17) com $K = 0$, vemos que, no intervalo $[0, \pi]$, o gráfico do seno é simétrico em relação à recta vertical de equação $y = \frac{\pi}{2}$. Finalmente, utilizando a igualdade $\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen}(\pi - x)$, que resulta das fórmulas (18) e (19), vemos que, no intervalo $[0, 2\pi]$, o gráfico do seno é simétrico em relação ao ponto de abcissa π e ordenada 0. O gráfico da restrição do seno ao intervalo $[0, 2\pi]$ terá então uma forma como a apresentada na figura 12.

Para outros valores da variável independente, o seno é facilmente calculado através da igualdade (14). Esta igualdade diz-nos, em particular, que $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$; consequentemente o gráfico do seno vai ser uma "repetição" da curva representada na figura 12. Apresentamos um esboço do gráfico da função seno na figura 13. A curva esboçada nessa figura, que é o gráfico da função seno, é usualmente chamada uma sinusóide (ou curva sinusoidal). Repare-se que, por (15), a função seno é ímpar, pelo que o seu gráfico é simétrico em relação à origem dos eixos.

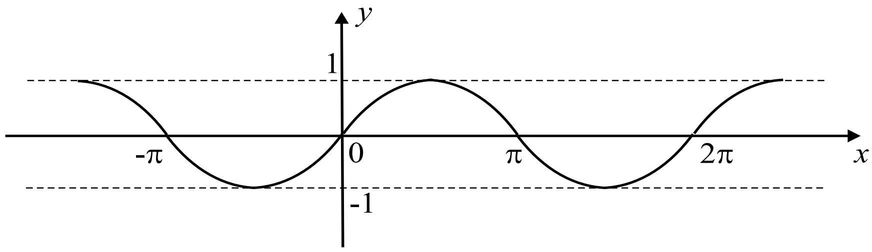

Figura 13: Gráfico da função seno.

Pelo facto de se ter, para todo o x real, $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$, dizemos que a função seno é periódica e que 2π é um período dessa função. De uma forma geral, uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se periódica sse existir um número real $T > 0$ tal que, para todo o x em $\mathbb{R}$, se tenha $\varphi(x + T) = \varphi(x)$. Chamaremos período de φ a qualquer número real T que verifique esta última igualdade; chamaremos período principal de φ ao ínfimo dos números reais T que verificam aquela igualdade. A função seno é periódica e o seu período principal é 2π.

•

• •

Não queremos deixar de referir uma outra propriedade geométrica interessante do seno de um número real x. Para isso consideremos um triângulo ΔORS, rectângulo em S, como o representado na figura 14.

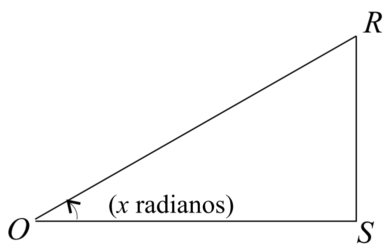

Figura 14: O triângulo rectângulo ORS.

Suponhamos que a medida do ângulo θ, em radianos, é x, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Consideremos um referencial ortonormado directo com origem no ponto O, com o primeiro eixo na direcção de OS e o segundo na direcção de SR, como representado na figura 15.

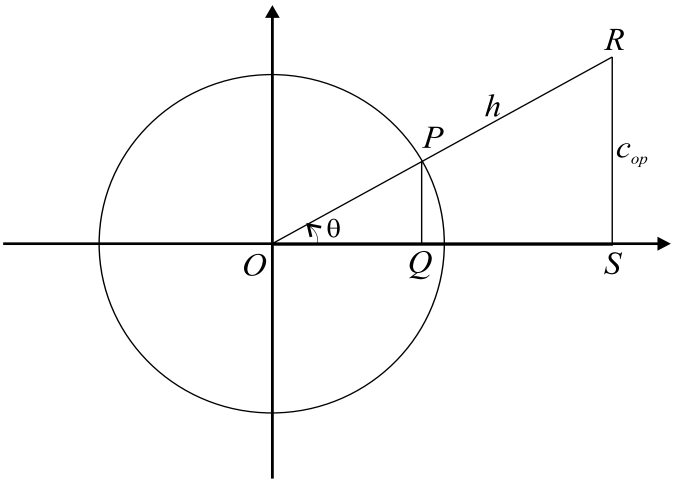

Figura 15: $\operatorname{sen} x = \dfrac{c_{op}}{h}$.

Designemos respectivamente por c_{op} e por h o comprimento do cateto oposto ao ângulo θ (ou seja, o comprimento do segmento RS) e o comprimento da hipótenusa do triângulo rectângulo ΔORS. Consideremos o círculo trigonométrico com centro em O; seja P o ponto de intersecção desse círculo com a semi-recta definida pela hipótenusa OR do triângulo rectângulo ΔORS [8]. Consideremos ainda o segmento PQ, que é um segmento vertical, paralelo a RS, e que vai do ponto P até à semi-recta definida pelo segmento OS. O seno de x, que é a ordenada do ponto P, é igual ao comprimento do segmento PQ. Atendendo a que o comprimento de OP é 1, por se tratar do raio do círculo trigonométrico, tem-se[9]:

$$\operatorname{sen} x = \overline{PQ} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}.$$

Mas, recorrendo ao teorema de Thales, sabemos que $\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{OR}}$; acabámos de provar que

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{RS}}{\overline{OR}} = \frac{c_{op}}{h}.$$

Por outras palavras, num triângulo rectângulo qualquer, sendo x a medida, em radianos, de um dos ângulos agudos, o seno de x é igual ao

[8]No caso representado na figura 15 o círculo trigonométrico intersecta a hipótenusa OR mas isso não aconteceria se o comprimento dessa hipótenusa fosse inferior a 1.

[9]Utilizaremos a notação $\overline{AB}$ para designar o comprimento do segmento AB.

quociente entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipótenusa.

•
• •

Seja α um número real qualquer e consideremos a equação

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha \tag{24}$$

Como resolver esta equação? A ideia é muito simples: recorrer ao círculo trigonométrico. O seno de α é um número compreendido entre -1 e 1 e, na figura 16, representamos a recta horizontal r de equação $y = \operatorname{sen} \alpha$. Dizer que o seno de x é igual ao seno de α é dizer que os pontos do círculo trigonométrico associados a x são os pontos de intersecção daquela recta com o círculo, ou seja, os pontos P e Q na figura 16. Consequentemente x é igual a α ou a $\pi - \alpha$, ou difere destes valores por um múltiplo inteiro de 2π. Em resumo:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x = 2K\pi + \alpha \ \vee \ x = 2K\pi + \pi - \alpha \quad (K \in \mathbb{Z}) \tag{25}$$

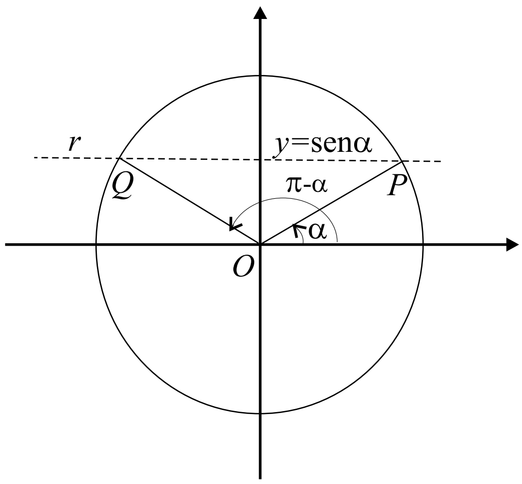

Figura 16: A equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha$.

Detalhemos alguns casos particulares da equação (25). No caso de se ter $\alpha = 0$ (o que corresponde à equação $\operatorname{sen} x = 0$), vem $x = 2K\pi$ ou $x = 2K\pi + \pi$; significa isto que x é um múltiplo inteiro de π. Portanto

$$\operatorname{sen} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = K\pi \quad (K \in \mathbb{Z}) \tag{26}$$

Consideremos ainda a equação (25), com $\alpha = \frac{\pi}{2}$, que corresponde à equação $\operatorname{sen} x = 1$. Por (25) sabemos que $x = 2K\pi + \frac{\pi}{2}$ ou $x = 2K\pi + \pi - \frac{\pi}{2}$; significa isto que $x = 2K\pi + \frac{\pi}{2}$. Portanto

$$\operatorname{sen} x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2K\pi + \frac{\pi}{2} \quad (K \in \mathbb{Z}) \tag{27}$$

Finalmente, consideremos (25) com $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ (o que corresponde à equação $\operatorname{sen} x = -1$). Por (25) sabemos que $x = 2K\pi - \frac{\pi}{2}$ ou $x = 2K\pi + \pi + \frac{\pi}{2}$, ou seja, $x = 2K\pi - \frac{\pi}{2}$. Portanto

$$\operatorname{sen} x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2K\pi - \frac{\pi}{2} \quad (K \in \mathbb{Z}) \tag{28}$$

3 Função co-seno

O co-seno de um número real x pode ser definido por um processo análogo ao do seno. O co-seno de x é a abcissa do ponto P do círculo trigonométrico associado a x, tal como representado na figura 17.

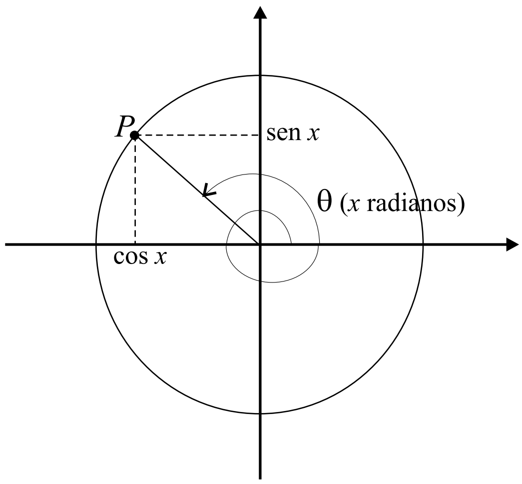

Figura 17: O seno e o co-seno de x.

Chamaremos função co-seno, e designá-la-emos por cos, à função que a cada número real x associa o co-seno de x, ou seja, o número $\cos x$. Tal como para o caso do seno, é imediato ver, recorrendo ao círculo trigonométrico, que

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

é uma função sobrejectiva mas não injectiva.

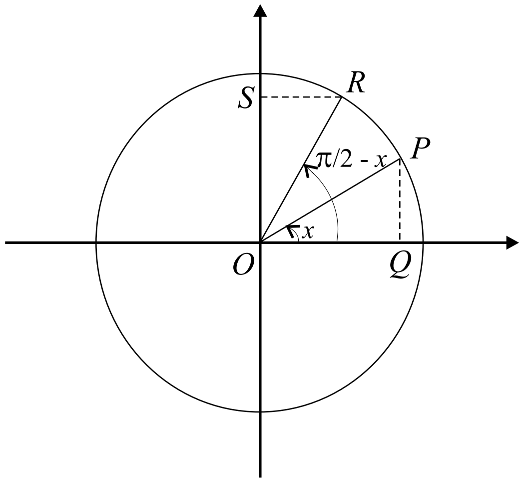

Figura 18: $\cos x = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$.

Seja x um número real qualquer; representamos o ângulo cuja medida em radianos é x na figura 18. O co-seno de x é, na figura 18, a abcissa do ponto P, ou seja, o comprimento do segmento OQ. Os triângulos ΔORS e ΔOPQ são, por construção, geometricamente iguais. Logo o comprimento do segmento OQ (que coincide com o co-seno de x) é igual ao comprimento do segmento OS (que coincide com o seno de $\frac{\pi}{2} - x$). O raciocínio que fizemos com o ponto P no 1^o quadrante generaliza-se facilmente ao caso em que P pertence aos outros quadrantes, pelo que se tem

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{29}$$

É, aliás, esta igualdade que justifica o nome de co-seno: os ângulos cujas medidas são, em radianos, x e $\frac{\pi}{2} - x$ são complementares.

Quando estudámos a função seno verificámos que, num triângulo rectângulo qualquer, o seno de x (sendo x a medida, em radianos, de um dos ângulos agudos) é igual ao quociente entre a medida do cateto oposto e a medida da hipótenusa. Como o co-seno de x é o seno de $\frac{\pi}{2} - x$, e este valor é a medida, em radianos, do outro ângulo agudo do triângulo, concluímos que, num triângulo rectângulo, o co-seno de x é igual ao quociente entre a medida do cateto adjacente e a medida da hipótenusa. Reportando-nos à figura 14, podemos escrever:

$$\cos x = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}}.$$

$$\bullet\quad\bullet\quad\bullet$$

A partir da fórmula (29) podemos facilmente calcular o valor do co-seno em pontos onde conheçamos o seno. Assim, tem-se:

$$\begin{array}{lll}
\cos 0 = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1; & \cos\dfrac{\pi}{2} = \operatorname{sen} 0 = 0; & \cos\pi = \operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1; \\
\cos\dfrac{3\pi}{2} = \operatorname{sen}(-\pi) = 0; & \cos(2\pi) = \operatorname{sen}\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1; & \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\pi = 0; \\
\cos\dfrac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; & \cos\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; & \cos\dfrac{\pi}{3} = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}.
\end{array}$$

Na tabela que apresentamos a seguir, indicamos os valores do seno de x e do co-seno de x para os casos $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{\pi}{2}$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Com recurso ao círculo trigonométrico, ou à fórmula (29), é fácil deduzir para o co-seno as igualdades correspondentes às estabelecidas para o seno em (15), (14), (16), (17) e (20), e que são:

$$\cos(-x) = \cos x \tag{30}$$
$$\cos(2K\pi + x) = \cos x \tag{31}$$
$$\cos(2K\pi - x) = \cos x \tag{32}$$
$$\cos(2K\pi + \pi + x) = -\cos x \tag{33}$$
$$\cos(2K\pi + \pi - x) = -\cos x \tag{34}$$

Estas igualdades são válidas quaisquer que sejam K pertencente a $\mathbb{Z}$ e x pertencente a $\mathbb{R}$.

A título de exemplo, deduziremos apenas a igualdade (30):

$$\cos(-x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

Na expressão anterior, a primeira igualdade resulta de substituir x por $-x$ em (29); a segunda igualdade é obtida de (17), com $K = 0$; a última igualdade não é mais do que (29). Recomendamos ao leitor interessado, como exercício, a dedução das outras fórmulas, quer recorrendo a (29), quer recorrendo directamente ao círculo trigonométrico.

Aliás todas estas igualdades são casos particulares de uma situação que relaciona o seno do número $K\frac{\pi}{2} + x$ (K inteiro) com o seno ou o co-seno de x. De facto, recorrendo ao círculo trigonométrico, é fácil mostrar que:

$$\operatorname{sen}\left(K\frac{\pi}{2} + x\right) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } K = 4m \quad (m \in \mathbb{Z}), \\ \cos x & \text{se } K = 4m + 1 \quad (m \in \mathbb{Z}), \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } K = 4m + 2 \quad (m \in \mathbb{Z}), \\ -\cos x & \text{se } K = 4m + 3 \quad (m \in \mathbb{Z}) \end{cases} \tag{35}$$

$$\cos\left(K\frac{\pi}{2} + x\right) = \begin{cases} \cos x & \text{se } K = 4m \quad (m \in \mathbb{Z}), \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } K = 4m + 1 \quad (m \in \mathbb{Z}), \\ -\cos x & \text{se } K = 4m + 2 \quad (m \in \mathbb{Z}), \\ \operatorname{sen} x & \text{se } K = 4m + 3 \quad (m \in \mathbb{Z}) \end{cases} \tag{36}$$

Há uma maneira de memorizar facilmente as fórmulas (35) e (36), que passamos a descrever. Seja P o ponto do círculo trigonométrico associado ao número $K\frac{\pi}{2}$; se o ponto P estiver situado no eixo das ordenadas, então a função "muda de nome" (queremos com isto dizer que o seno passa a co-seno e vice-versa); se P estiver situado no eixo das abcissas, a função "mantém o nome"; o sinal $+$ ou $-$ é determinado pelo sinal que a função em questão (o seno ou o co-seno) toma no quadrante a que pertence o ponto do círculo trigonométrico associado a $K\frac{\pi}{2} + x$, supondo que o ponto associado a x está no primeiro quadrante.

Exemplifiquemos, aplicando a regra descrita a

$$\cos\left(57\pi + \frac{\pi}{2} + x\right).$$

Como $57\pi + \frac{\pi}{2}$ determina um ponto do círculo trigonométrico no eixo das ordenadas, a função co-seno passa a seno. Como $57\pi + \frac{\pi}{2} + x$ determina um ponto do círculo trigonométrico no quarto quadrante (supondo que o ponto correspondente a x está no primeiro quadrante) e, no quarto quadrante, o co-seno é positivo, deverá ter-se

$$\cos\left(57\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{sen} x.$$

Repare-se que este resultado seria o obtido por aplicação de (36), tendo em conta que

$$57\pi + \frac{\pi}{2} + x = 115\frac{\pi}{2} + x = (4 \times 28 + 3)\frac{\pi}{2} + x.$$

•
• •

A partir da igualdade (29) é imediato obter o gráfico da função co-seno: basta transladar o gráfico do seno, para a esquerda, de $\frac{\pi}{2}$. Apresentamos o gráfico da função co-seno na figura 19. A função co-seno é periódica e o seu período principal é 2π. Por outro lado, a igualdade (30) mostra-nos que a função co-seno é par, pelo que o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

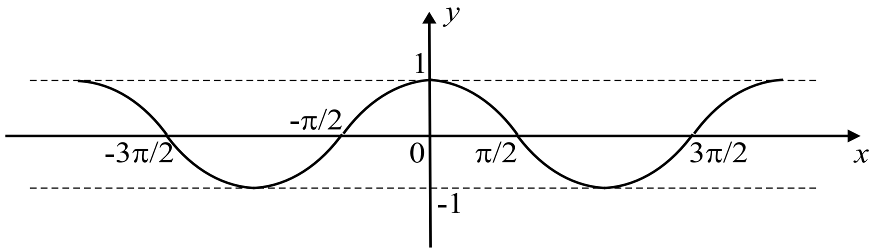

Figura 19: Gráfico da função co-seno.

•
• •

Seja x um número real qualquer e seja P o ponto do círculo trigonométrico associado a x. Designemos respectivamente por ξ e η a abcissa e a ordenada de P no referencial onde está inserido o círculo trigonométrico. Já sabemos que, por definição, se tem $\cos x = \xi$ e $\operatorname{sen} x = \eta$. Por outro lado, tendo em conta que o raio do círculo trigonométrico é 1, sabemos que a equação do círculo trigonométrico é $\xi^2 + \eta^2 = 1$ (ver fórmula (1)). Acabámos de demonstrar que, para todo o número real x, se tem[10]

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \tag{37}$$

Diremos que (37) é a igualdade fundamental da trigonometria.

•
• •

Prosseguiremos esta secção com a resolução de algumas equações trigonométricas. Comecemos por considerar a equação

$$\cos x = \cos \alpha \tag{38}$$

[10]Não confundir os símbolos $\cos^2 x$ e $\cos x^2$. O primeiro designa $(\cos x)^2$, enquanto o segundo designa $\cos(x^2)$.

onde α é um número real dado e x é a incógnita. A resolução pode fazer-se utilizando as igualdades (29) e (25):

$$
\begin{aligned}
\cos x = \cos\alpha \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} - x = 2K\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha \ \vee \ \frac{\pi}{2} - x = 2K\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + \alpha \\
&\Leftrightarrow \quad x = -2K\pi + \alpha \ \vee \ x = -2K\pi - \alpha \\
&\Leftrightarrow \quad x = 2K\pi + \alpha \ \vee \ x = 2K\pi - \alpha \\
&\Leftrightarrow \quad x = 2K\pi \pm \alpha.
\end{aligned}
$$

Um outro processo de resolver (38) é recorrer directamente ao círculo trigonométrico, tal como fizemos na resolução de (24) — que é a equação correspondente para o caso do seno. Dizer que o co-seno de x é igual ao co-seno de α, é dizer que os pontos correspondentes a x e a α no círculo trigonométrico têm a mesma abcissa, ou seja, situam-se numa mesma recta vertical, de equação $x = \cos\alpha$, como representamos na figura 20. Consequentemente $x = \alpha$, ou $x = -\alpha$, ou x difere destes valores por um múltiplo inteiro de 2π. Por outras palavras, $x = 2K\pi + \alpha$ ou $x = 2K\pi - \alpha$, com K inteiro.

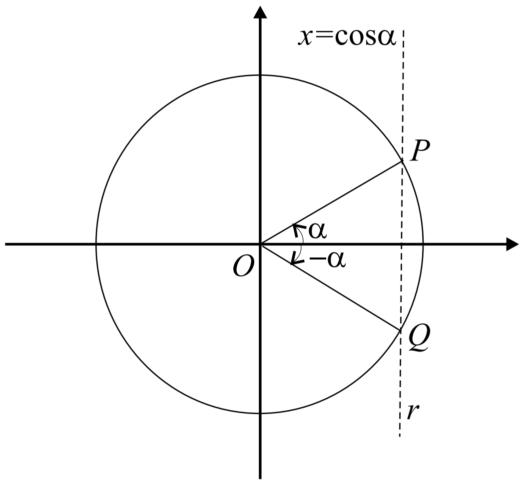

Figura 20: Resolução de $\cos x = \cos\alpha$.

Como casos particulares da equação (38), assinalamos:

$$
\begin{aligned}
\cos x = 0 &\Leftrightarrow x = K\pi + \frac{\pi}{2}; \\
\cos x = 1 &\Leftrightarrow x = 2K\pi; \\
\cos x = -1 &\Leftrightarrow x = 2K\pi + \pi.
\end{aligned}
$$

Uma outra equação que se pode tratar de forma análoga é

$$\cos x = \operatorname{sen} \alpha \tag{39}$$

A ideia é reduzir tudo a uma única função — que pode ser o seno ou o co-seno. A equação (39) é equivalente a

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

que é uma equação do tipo (38), onde em vez de α aparece $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Tem-se então

$$x = 2K\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha \ \vee \ x = 2K\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Consideremos agora a equação

$$\cos x = \operatorname{sen} x \tag{40}$$

Tendo em conta a resolução de (39), podemos garantir que x é solução de (40) sse

$$x = 2K\pi + \frac{\pi}{2} - x \ \vee \ x = 2K\pi - \frac{\pi}{2} + x.$$

Como a segunda destas igualdades é uma condição impossível, vem

$$x = 2K\pi + \frac{\pi}{2} - x,$$

que é equivalente a

$$x = K\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Uma outra forma de obter este resultado é recorrer directamente ao círculo trigonométrico, como representado na figura 21.

Dizer que o seno de x é igual ao co-seno de x é dizer que os pontos do círculo trigonométrico associados a x têm uma abcissa igual à ordenada, ou seja, pertencem à recta r de equação $y = x$; na figura 21 trata-se dos pontos P e Q. Logo x é igual a $\frac{\pi}{4}$, ou é igual a $5\frac{\pi}{4}$, ou difere destes valores por um múltiplo inteiro de 2π. Portanto $x = K\pi + \frac{\pi}{4}$, com K inteiro.

Consideremos ainda a seguinte equação:

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \cos x = 0 \tag{41}$$

Já sabemos que a ideia para resolver uma equação deste tipo — onde aparecem as funções seno e co-seno — é reduzir tudo à mesma função. Neste caso isso consegue-se facilmente através da igualdade fundamental

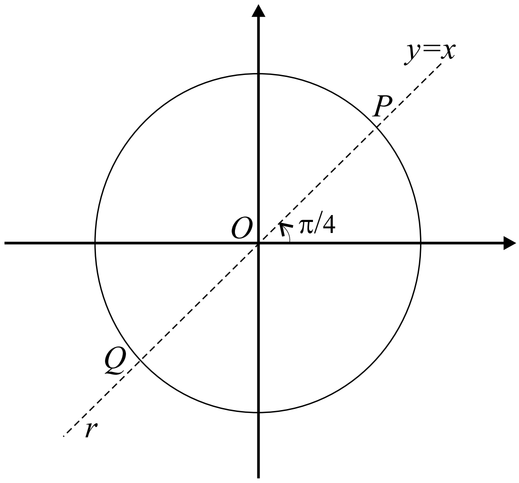

Figura 21: Resolução de $\cos x = \operatorname{sen} x$.

da trigonometria (37). Substituindo, na equação (41), o $\operatorname{sen}^2 x$ por $1-\cos^2 x$ obtemos

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0,$$

equação que é equivalente a

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Substituindo, nesta última equação, o co-seno de x por ξ, ou seja, fazendo a mudança de variável $\xi = \cos x$, obtemos

$$2\xi^2 - \xi - 1 = 0.$$

Trata-se de uma equação do segundo grau na variável ξ, cujas soluções são obtidas utilizando a fórmula resolvente para este tipo de equações:

$$\xi = \frac{1 + \sqrt{1 - (4 \times 2 \times (-1))}}{2 \times 2} \ \vee \ \xi = \frac{1 - \sqrt{1 - (4 \times 2 \times (-1))}}{2 \times 2}.$$

Tem-se então

$$\xi = 1 \quad \vee \quad \xi = -\frac{1}{2}.$$

Concluímos assim que x é solução da equação (41) sse

$$\cos x = 1 \quad \vee \quad \cos x = -\frac{1}{2}.$$

A primeira destas equações já foi resolvida anteriormente (é do tipo (38)); a segunda pode escrever-se $\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$, que é também uma equação do tipo (38). As soluções de (41) são então

$$x = 2K\pi \quad \vee \quad x = 2K\pi + \frac{2\pi}{3} \quad \vee \quad x = 2K\pi - \frac{2\pi}{3},$$

ou ainda

$$x = 2K\frac{\pi}{3}.$$

Exercício 1. Determine o conjunto de soluções de cada uma das seguintes equações:

(i) $\operatorname{sen}^2 x + 2\cos x - 1 = 0$;

(ii) $\operatorname{sen}^2 x + \cos x - 1 = 0$.

Vamos deduzir, com recurso ao círculo trigonométrico, algumas fórmulas importantes. Começaremos com as fórmulas do seno e do co-seno da soma de dois números reais x e y, que são:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \tag{42}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \tag{43}$$

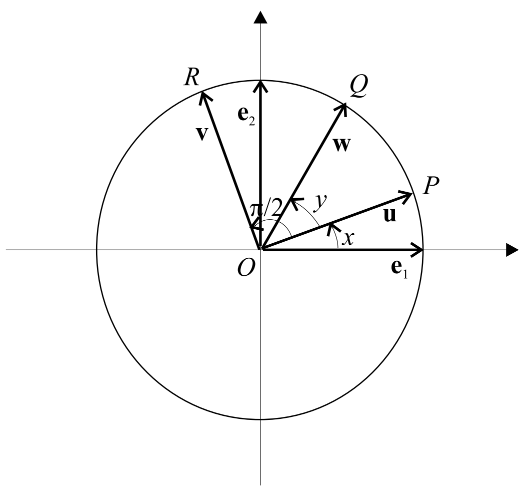

Figura 22: Seno e co-seno da soma.

Para demonstrarmos as fórmulas (42) e (43), consideramos o círculo trigonométrico representado na figura 22. O referencial ortonormado directo onde está inserido o círculo trigonométrico é, como habitualmente, designado por $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ e encontra-se também representado na figura 22. Sejam respectivamente P e Q os pontos do círculo trigonométrico associados aos números reais x e $x + y$. Designemos por R o ponto do círculo trigonométrico associado ao número $x + \frac{\pi}{2}$. Designando respectivamente por $\mathbf{u}$ e por $\mathbf{v}$ os vectores correspondentes aos segmentos orientados OP e OR, podemos pensar no referencial $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v})$; por construção trata-se de um referencial ortonormado directo.

As coordenadas dos pontos P e R no referencial $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ são, respectivamente,

$$(\cos x, \operatorname{sen} x),$$
$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = (-\operatorname{sen} x, \cos x),$$

pelo que os vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ se podem escrever da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \cos x \mathbf{e}_1 + \operatorname{sen} x \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{v} &= -\operatorname{sen} x \mathbf{e}_1 + \cos x \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

As coordenadas do ponto Q no referencial $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ são, por definição de seno e co-seno,

$$(\cos y, \operatorname{sen} y).$$

Consequentemente o vector $\mathbf{w}$, correspondente ao segmento orientado OQ (ver figura 22), pode escrever-se da forma

$$\mathbf{w} = \cos y \mathbf{u} + \operatorname{sen} y \mathbf{v}.$$

Introduzindo nesta última igualdade as expressões que obtivemos para $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como função de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, vem

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \cos y \mathbf{u} + \operatorname{sen} y \mathbf{v} \\ &= \cos y(\cos x \mathbf{e}_1 + \operatorname{sen} x \mathbf{e}_2) + \operatorname{sen} y(-\operatorname{sen} x \mathbf{e}_1 + \cos x \mathbf{e}_2) \\ &= (\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\mathbf{e}_1 + (\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y)\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Portanto as coordenadas do ponto Q no referencial $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ são

$$(\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y).$$

Mas, por definição, as coordenadas de Q no referencial $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ são

$$(\cos(x + y), \operatorname{sen}(x + y)).$$

Logo

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,
\end{aligned}$$

que são precisamente as igualdades (42) e (43).

A partir das igualdades (42) e (43) é imediato obter as fórmulas para o seno e o co-seno da diferença de dois números reais; basta substituir em (42) e (43) y por $-y$, tendo em conta que o seno é uma função ímpar e o co-seno é uma função par. Obtém-se

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y \tag{44}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \tag{45}$$

É também a partir de (42) e (43) que podemos obter o seno e o co-seno da duplicação: basta substituir y por x em cada uma daquelas igualdades. Vem

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x \tag{46}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \tag{47}$$

A fórmula (47) permite-nos exprimir o quadrado do seno de x e o quadrado do co-seno de x como função do co-seno de $2x$. De facto, tendo em conta a igualdade fundamental da trigonometria, podemos eliminar o co-seno quadrado em (47), obtendo

$$\cos(2x) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x,$$

ou ainda,

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \tag{48}$$

Analogamente, eliminando o seno quadrado em (47), por intermédio da igualdade fundamental da trigonometria, vem

$$\cos(2x) = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x),$$

ou ainda,

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \tag{49}$$

Resta-nos deduzir quatro fórmulas importantes, que nos dão a soma e a diferença entre os senos e os co-senos de dois números reais u e v, e que são as seguintes:

$$\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v = 2\cos\frac{u+v}{2}\operatorname{sen}\frac{u-v}{2} \tag{50}$$

$$\cos u - \cos v = -2\operatorname{sen}\frac{u+v}{2}\operatorname{sen}\frac{u-v}{2} \tag{51}$$

$$\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2\operatorname{sen}\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} \tag{52}$$

$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} \tag{53}$$

Para deduzirmos (50), partimos das fórmulas (42) e (44):

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x\cos y + \cos x\operatorname{sen} y$$
$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x\cos y - \cos x\operatorname{sen} y.$$

Subtraindo estas duas equações termo a termo, obtemos

$$\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = 2\cos x\operatorname{sen} y \tag{54}$$

Como queremos obter uma fórmula para a diferença entre o seno de u e o seno de v, é natural designarmos $x+y$ por u e $x-y$ por v, ou seja, utilizarmos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases} \tag{55}$$

Resolvendo o sistema (55) em ordem a x e y, obtemos

$$\begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{u-v}{2} \end{cases} \tag{56}$$

Podemos agora introduzir na fórmula (54) os valores de $x+y$, $x-y$, x e y dados por (55) e (56); obtemos

$$\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v = 2\cos\frac{u+v}{2}\operatorname{sen}\frac{u-v}{2}$$

que é precisamente a fórmula (50).

Substituindo, em (50), v por $-v$, e tendo em conta que a função seno é ímpar, resulta imediatamente (52).

As deduções de (51) e (53) são semelhantes, partindo agora das fórmulas (43) e (45):

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

Subtraindo e somando estas duas equações termo a termo, obtemos respectivamente

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \tag{57}$$
$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y \tag{58}$$

Introduzindo em (57) e (58) os valores de $x+y$, $x-y$, x e y dados por (55) e (56), obtemos respectivamente

$$\cos u - \cos v = -2 \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} \operatorname{sen} \frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

que são precisamente as igualdades (51) e (53).

4 Funções tangente e cotangente

A função tangente, designada por tg, é definida pela fórmula

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \tag{59}$$

O domínio da função tangente, tal como decorre de (59), é o conjunto D_{tg} de todos os números reais cujo co-seno é diferente de zero:

$$D_{\mathrm{tg}} = \{x \in \mathbb{R}; \cos x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq K\pi + \frac{\pi}{2} (K \in \mathbb{Z})\right\}.$$

A tangente tem uma interpretação geométrica simples no círculo trigonométrico, tal como indicado na figura 23, onde se considera o caso de x pertencer ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Recordamos que o seno de x é a ordenada do ponto P do círculo trigonométrico associado a x, ou seja, no caso da figura 23, o comprimento do segmento PQ. O co-seno de x é a abcissa de P, ou seja, o comprimento do segmento OQ. Portanto:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}.$$

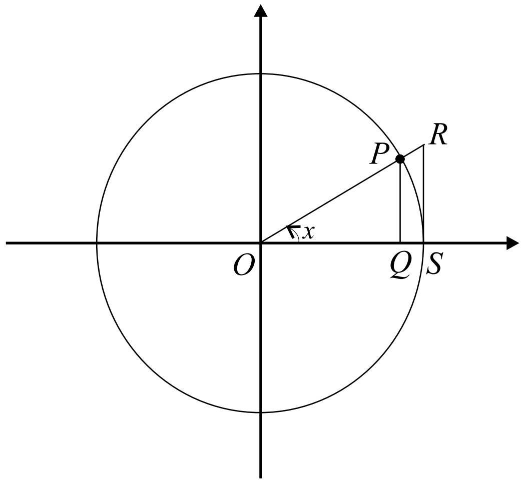

Figura 23: Primeira interpretação geométrica da tangente de x.

Recorrendo ao teorema de Thales, e tendo em conta que o comprimento do segmento OS é igual a 1, visto ser o raio do círculo trigonométrico, vem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{OS}} = \overline{RS}.$$

No caso de um qualquer valor de x pertencente ao domínio da tangente, é imediato ver que o valor absoluto da tangente de x é igual ao comprimento do segmento vertical, tangente ao círculo trigonométrico, e que une a semi-recta OP, determinada pelo ponto P do círculo trigonométrico associado a x, ao eixo das abcissas.

A tangente de x tem uma outra interpretação geométrica, no círculo trigonométrico, que descrevemos na figura 24, onde a recta r é tangente ao ponto P do círculo trigonométrico associado a x. Os triângulos ΔOPQ e ΔOPR são semelhantes, visto serem ambos rectângulos e terem um ângulo agudo (de medida x radianos) igual. Ora nós sabemos que, em triângulos semelhantes, a razão entre lados opostos a ângulos iguais é constante; logo, e atendendo a que o raio do círculo trigonométrico é igual a 1, vem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{OP}} = \overline{PR}.$$

No caso de um qualquer valor de x pertencente ao domínio da tangente, é imediato ver que o valor absoluto da tangente de x é igual ao comprimento do segmento da recta tangente ao ponto P do círculo trigonométrico

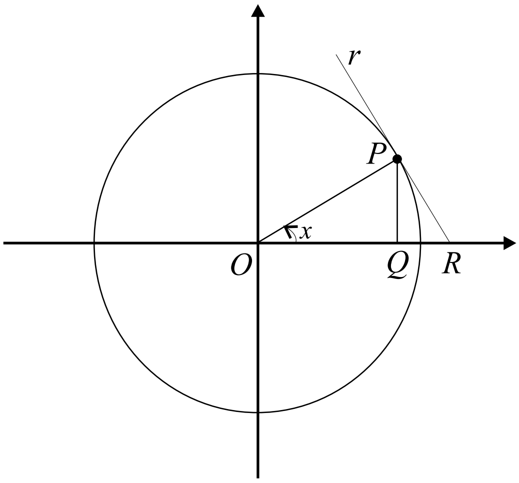

Figura 24: Segunda interpretação geométrica da tangente de x.

associado a x, definido pelos pontos P e pelo ponto de intersecção dessa recta com o eixo das abcissas.

Em ambas as interpretações geométricas apresentadas o valor absoluto da tangente de x corresponde à medida de um segmento de uma recta tangente a um determinado ponto do círculo trigonométrico. Daí a justificação para a designação de tangente.

Consideremos agora um triângulo ΔOPQ qualquer, rectângulo em Q, como o representado na figura 25.

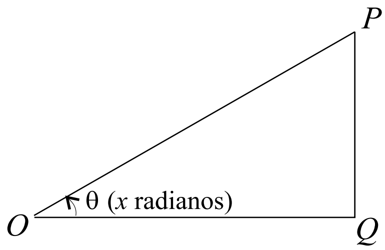

Figura 25: O triângulo rectângulo OPQ.

Já sabemos que, num triângulo rectângulo qualquer, o seno de x, sendo x a medida em radianos de um dos ângulos agudos, é igual ao quociente entre os comprimentos do cateto oposto a esse ângulo e da hipótenusa. Sabemos também que o co-seno de x é igual ao quociente entre os comprimentos do cateto adjacente e da hipótenusa. Designemos por θ o ângulo agudo $\angle POQ$ e seja x a medida, em radianos, do ângulo θ. Tem-se

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}}{\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}.$$

Em conclusão: num triângulo rectângulo qualquer, a tangente de x, sendo x a medida em radianos de um dos ângulos agudos, é igual ao quociente entre os comprimentos do cateto oposto a esse ângulo e do cateto adjacente.

•
• •

A interpretação geométrica da tangente feita na figura 23 permite-nos demonstrar uma propriedade importante da tangente de x, quando x pertence ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}[$. De facto, e reportando-nos à figura 23, vemos que, para x pertence ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}[$, a área do triângulo ΔORS é maior ou igual[11] à área do sector circular OPS. Ora a área do triângulo ΔORS é igual a

$$\frac{1}{2}\,\overline{OS}\;\overline{RS} = \frac{1}{2}\,\overline{RS}$$

e a área do sector circular OPS, tendo em conta que o raio do círculo trigonométrico é 1, é igual a[12]

$$\frac{1}{2}\,x.$$

Concluímos assim que

$$\frac{1}{2}\,x \le \frac{1}{2}\,\overline{RS},$$

ou seja,

$$x \le \overline{RS}.$$

Mas, para $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, o comprimento do segmento RS coincide com a tangente de x. Acabámos de mostrar que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad x \le \operatorname{tg} x. \tag{60}$$

Tendo em conta esta desigualdade e a desigualdade (21), podemos escrever

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \operatorname{sen} x \le x \le \operatorname{tg} x \tag{61}$$

[11] Aliás, só é igual se $x = 0$.

[12] Relembramos que a área de um sector circular de raio R e ângulo ao centro x radianos é igual a $\frac{1}{2}R^2x$.

Façamos agora um estudo da função tangente e esbocemos o seu gráfico. Já sabemos que o domínio da função tangente é o conjunto D_{tg} dos números reais x tais que o co-seno de x é diferente de zero, ou seja,

$$D_{\text{tg}} = \{x \in \mathbb{R};\ \cos x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R};\ x \neq K\pi + \frac{\pi}{2} \quad (K \in \mathbb{Z})\right\}.$$

Recorramos à interpretação geométrica explicitada na figura 23. Aí vemos que, quando x cresce de 0 até $\frac{\pi}{2}$, sem atingir este valor, o comprimento do segmento RS — que coincide com a tangente de x — vai aumentando, a partir de 0, tanto quanto nós queiramos. Isto significa que, no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}[$, a tangente é uma função crescente e toma todos os valores do intervalo $[0, +\infty[$. O gráfico da restrição da função tangente ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}[$ está representado na figura 26.

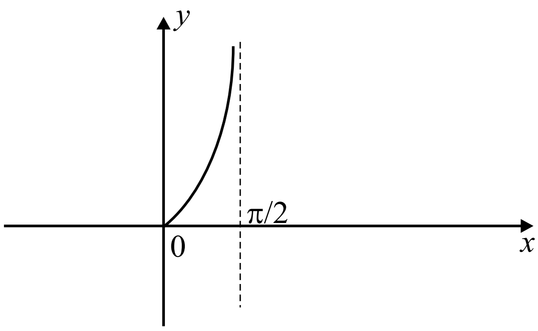

Figura 26: Restrição da função tangente ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

É muito fácil ver que a função tangente é ímpar porque

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$

Então o gráfico da tangente terá de ser simétrico em relação à origem do referencial. A partir da figura 26, concluímos que a restrição da função tangente ao intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ terá um gráfico como o esboçado na figura 27.

Das igualdades $\operatorname{sen}(x+2\pi)=\operatorname{sen} x$ e $\cos(x+2\pi) = \cos x$ resulta o seguinte:

$$\operatorname{tg}(x + 2\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x + 2\pi)}{\cos(x + 2\pi)} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

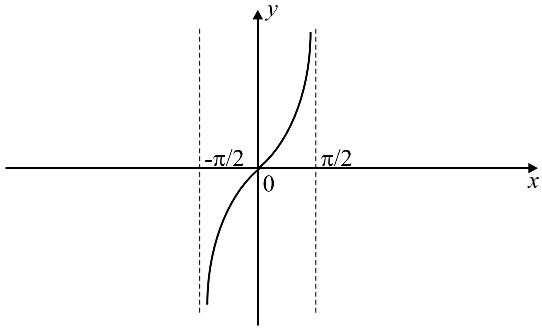

Figura 27: Restrição da função tangente ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Devido à igualdade precedente, dizemos que a função tangente é periódica e que um seu período é 2π. No entanto, tendo em conta as igualdades (35) e (36), podemos escrever

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Acabámos de mostrar que:

$$\forall x \in D_{\operatorname{tg}} \quad \operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x \tag{62}$$

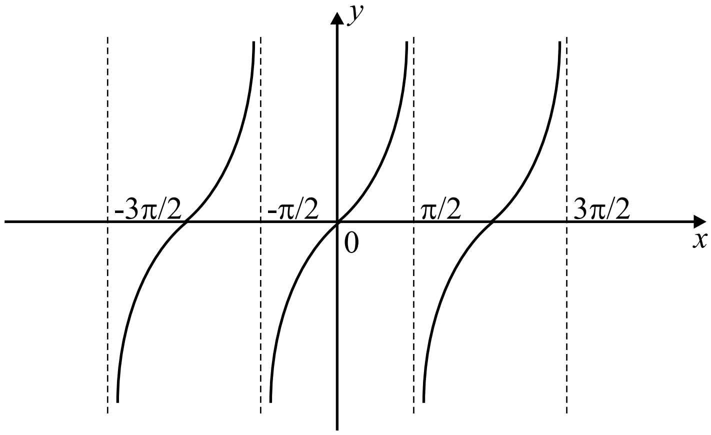

Figura 28: Função tangente.

Devido a (62), dizemos que π é um período da função tangente. Tendo em conta que a restrição da função tangente ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ é injectiva, como se depreende da figura 27, vemos que π é o menor período da função tangente; dizemos tratar-se do período principal.

Uma vez conhecido o gráfico da restrição da função tangente ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, esboçado na figura 27, e sabido que π é um período da função tangente, é imediato obter o gráfico desta função. De facto ele vai ser uma "repetição" do gráfico representado na figura 27. Esboçamo-lo na figura 28.

•
• •

A função cotangente, designada por cotg, é definida pela fórmula

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \tag{63}$$

O domínio da função cotangente, como se depreende de (63), é o conjunto D_{cotg} de todos os números reais cujo seno é diferente de zero:

$$D_{\text{cotg}} = \{x \in \mathbb{R};\ \operatorname{sen} x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq K\pi \quad (K \in \mathbb{Z})\}.$$

Utilizando as igualdades (35) e (36) é imediato encontrar um relação entre a cotangente e a tangente:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Mostrámos assim que, para todo o x no domínio da cotangente, se tem

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{64}$$

É precisamente (64) que sugeriu o nome de cotangente: a cotangente de x é a tangente de $\frac{\pi}{2} - x$ e os ângulos com estas medidas (em radianos) são complementares.

A cotangente tem uma interpretação geométrica simples no círculo trigonométrico, tal como indicado na figura 29, onde se considera o caso de x pertencer ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$. Na figura 29, os triângulos ΔOPQ e ΔORS são semelhantes, pois são ambos rectângulos e o ângulo $\angle POQ$ é igual ao ângulo $\angle ORS$. Tem-se então:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{OS}} = \overline{RS}.$$

No caso de um qualquer valor de x pertencente ao domínio da cotangente, é imediato ver que o valor absoluto da cotangente de x é igual ao comprimento do segmento horizontal, tangente ao círculo trigonométrico, e que

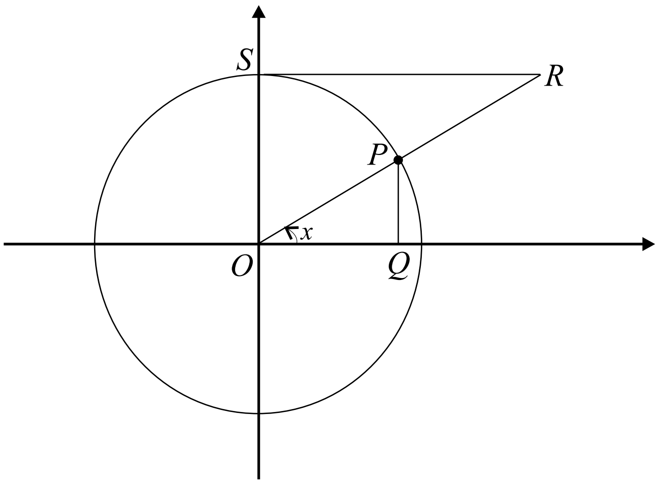

Figura 29: Primeira interpretação geométrica da cotangente de x.

une a semi-recta OP, determinada pelo ponto P do círculo trigonométrico associado a x, ao eixo das ordenadas.

A cotangente de x tem uma outra interpretação geométrica, no círculo trigonométrico, que descrevemos na figura 30, onde a recta r é tangente ao ponto P do círculo trigonométrico associado a x. Os triângulos ΔOPQ e ΔOPR são semelhantes. Logo, atendendo a que o raio do círculo trigonométrico é igual a 1, vem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{OP}} = \overline{PR}.$$

No caso de um qualquer valor de x pertencente ao domínio da cotangente, é imediato ver que o valor absoluto da cotangente de x é igual ao comprimento do segmento da recta tangente ao ponto P do círculo trigonométrico associado a x, definido pelos pontos P e pelo ponto de intersecção dessa recta com o eixo das ordenadas.

Repare-se que, para todo o x pertencente simultaneamente ao domínio da tangente e ao domínio da cotangente, se tem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Consequentemente, na figura 30, o comprimento do segmento PR é o inverso aritmético do comprimento do segmento PS:

$$\overline{PR} = \frac{1}{\overline{PS}}.$$

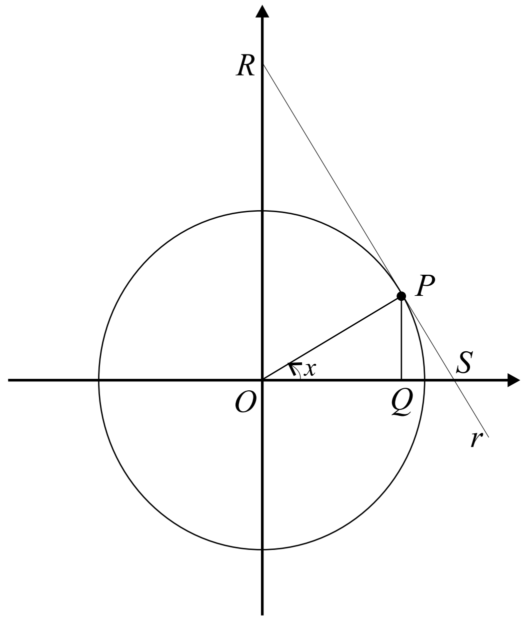

Figura 30: Segunda interpretação geométrica da cotangente de x.

Consideremos um triângulo rectângulo qualquer; seja x a medida, em radianos, de um dos ângulos agudos. Já sabemos que a tangente de x é igual ao quociente entre os comprimentos do cateto oposto a esse ângulo e do cateto adjacente. Por consequência a cotangente de x é igual ao quociente entre os comprimentos do cateto adjacente e do cateto oposto. Em resumo, num triângulo rectângulo qualquer, a cotangente da medida x (em radianos) de um ângulo agudo é igual ao quociente entre o comprimento do cateto adjacente a esse ângulo e o comprimento do cateto oposto.

Para obtermos o gráfico da função cotangente, recorremos a (64) e ao facto da tangente ser uma função ímpar:

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

O gráfico da função $x \mapsto -\operatorname{tg} x$ obtem-se a partir do gráfico da tangente (figura 28), por simetria em relação ao eixo das abcissas. Representamo-lo na figura 31.

Finalmente, o gráfico da função cotangente pode obter-se a partir da figura 31, por translação de $\frac{\pi}{2}$. Representamo-lo na figura 32.

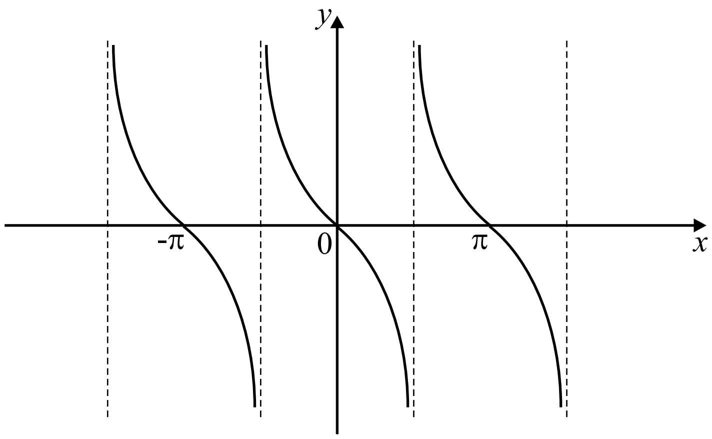

Figura 31: Gráfico de $x \to -\operatorname{tg} x$.

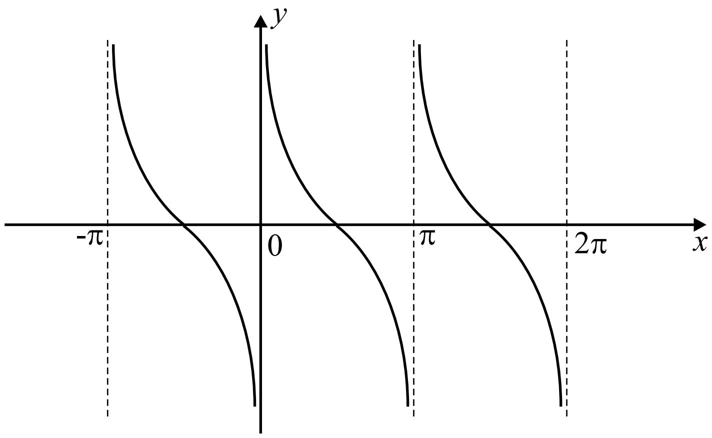

Figura 32: Função cotangente.

Da observação da figura 32 vemos que o contradomínio da cotangente é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e que se trata de uma função periódica, cujo período principal é π. O gráfico apresenta assímptotas verticais de equação $x = K\pi$, com K inteiro. A restrição da função cotangente ao intervalo $]0, \pi[$ é uma função decrescente. Aliás, o mesmo se passa com a restrição da função cotangente a qualquer intervalo da forma $]K\pi, (K+1)\pi[$, com K inteiro.

A tangente e a cotangente de x são imediatamente calculáveis para valores de x que conheçamos o seno e o co-seno. Na tabela que apresentamos a seguir, indicamos os valores do seno de x, do co-seno de x, da tangente de x e da cotangente de x (quando possível), para os casos $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{\pi}{2}$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{cotg} x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

•
•   •

Utilizando as fórmulas (35) e (36) é imediato deduzir fórmulas correspondentes para a tangente e para a cotangente; são as seguintes:

$$\operatorname{tg}(K\pi + x) = \operatorname{tg} x \tag{65}$$

$$\operatorname{tg}\left(K\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{cotg} x \tag{66}$$

$$\operatorname{cotg}(K\pi + x) = \operatorname{cotg} x \tag{67}$$

$$\operatorname{cotg}\left(K\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg} x \tag{68}$$

Há uma maneira de memorizar facilmente as fórmulas (65) a (68), que passamos a descrever. Seja P o ponto do círculo trigonométrico associado ao número que se quer calcular a tangente ou a cotangente ($K\pi + x$ ou $K\pi + \frac{\pi}{2} + x$); se o ponto P estiver situado no eixo das ordenadas, então a função "muda de nome" (queremos com isto dizer que a tangente passa a cotangente e vice-versa); se P estiver situado no eixo das abcissas, a função "mantém o nome". Se a função mudar de nome aparece o sinal $-$; se não mudar de nome o sinal fica $+$.

•
•   •

Repare-se que, para todo o $x \in D_{\mathrm{tg}} \cap D_{\mathrm{cotg}}$, se tem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

No entanto a função $x \to \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ não coincide com a função $x \to \operatorname{cotg} x$. De facto o domínio de $x \to \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ é a intersecção do domínio da tangente com o conjunto de pontos onde a tangente não se anula, ou seja, o conjunto de pontos onde nem o seno nem o co-seno se anulam. Trata-se de um conjunto estritamente contido no domínio da co-tangente, pelo que as funções são distintas. Obviamente, $x \to \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ é a restrição da função co-tangente ao conjunto $D_{\mathrm{tg}} \cap D_{\mathrm{cotg}}$.

5 Funções secante e co-secante

Para além das funções seno, co-seno, tangente e co-tangente, é ainda usual definir as funções secante e co-secante[13]. As funções secante — designada por sec — e co-secante — designada por cosec — são definidas respectivamente por:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \tag{69}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \tag{70}$$

Como se depreende de (69) e (70), o domínio da secante é o conjunto de números reais x tais que $\cos x \neq 0$ e o domínio da co-secante é o conjunto de números reais x tais que $\operatorname{sen} x \neq 0$. Vemos assim que o domínio da secante coincide com o domínio da tangente, enquanto o domínio da co-secante coincide com o domínio da cotangente.

Os gráficos das funções secante e co-secante são facilmente obtidos, respectivamente, a partir dos gráficos do co-seno e do seno. Representamo-los nas figuras 33 e 34.

Da análise das figuras 33 e 34 vemos que o contradomínio das funções secante e co-secante é o conjunto $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. São funções periódicas de período principal 2π.

[13] Estas funções não fazem parte dos programas recentes do ensino secundário.

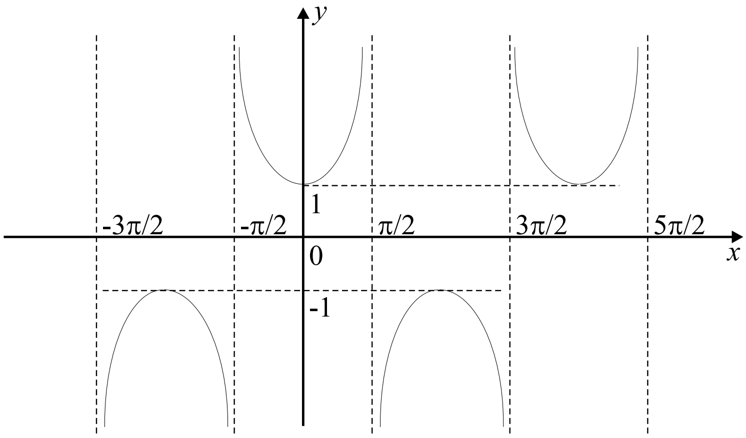

Figura 33: Função secante.

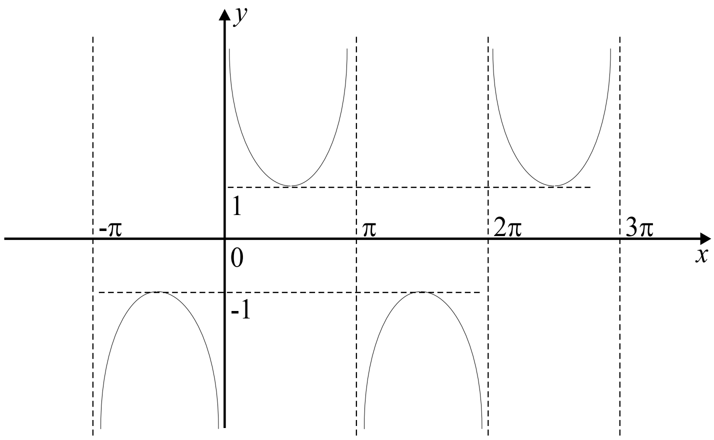

Figura 34: Função co-secante.

As funções secante e co-secante têm uma interpretação simples no círculo trigonométrico, que passamos a descrever, com base na figura 35, onde x é um número real compreendido entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ e P é o ponto do círculo trigonométrico associado a x.

Os triângulos ΔOPQ e ΔORA são semelhantes, pelo que, tendo em conta que o raio do círculo trigonométrico é 1, se tem

$$\overline{OR} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{\overline{OQ}} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

Vemos assim que a secante de x coincide com o comprimento do segmento OR. Daí o nome de "secante", visto a recta que passa em O e em P ser

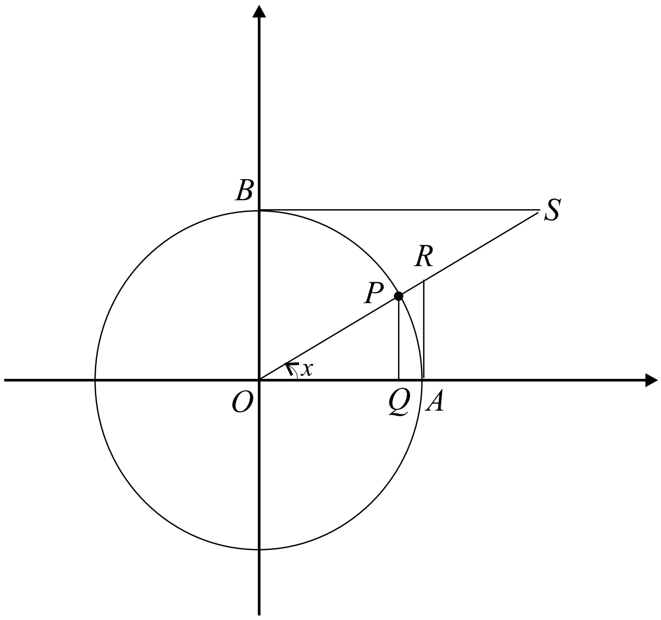

Figura 35: Função co-secante.

secante ao círculo trigonométrico.

Para a interpretação da co-secante no círculo trigonométrico, consideramos os triângulos ΔOPQ e ΔOSB. Como se trata de triângulos semelhantes, sabemos que a razão entre lados correspondentes a ângulos iguais é constante; logo

$$\overline{OS} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} = \frac{1}{\overline{PQ}} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cosec} x.$$

A co-secante de x coincide com o comprimento do segmento OS. O nome de co-secante vem do facto de ser a secante de $\frac{\pi}{2} - x$, o que é imediato porque

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Recapitulamos as interpretações geométricas, no círculo trigonométrico, das diversas funções trigonométricas do número x, compreendido entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, reportando-nos à figura 35:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \overline{PQ} & \qquad \cos x &= \overline{OQ} \\ \operatorname{tg} x &= \overline{AR} & \qquad \operatorname{cotg} x &= \overline{BS} \\ \sec x &= \overline{OR} & \qquad \operatorname{cosec} x &= \overline{OS} \end{aligned}$$

Consideremos um triângulo rectângulo qualquer e designemos por x a medida, em radianos, de um dos ângulos agudos. A secante de x, por ser o inverso aritmético do co-seno de x, é igual ao quociente entre o comprimento da hipótenusa e o comprimento do cateto adjacente ao ângulo agudo em questão. A co-secante de x, por ser o inverso aritmético do seno de x, é igual ao quociente entre o comprimento da hipótenusa e o comprimento do cateto oposto.

•
• •

Da igualdade fundamental da trigonometria — fórmula (37) — podemos deduzir relações semelhantes para as outras funções trigonométricas. Relembremos (37):

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1.$$

Dividindo ambos os membros desta equação por $\cos^2 x$ (supondo $\cos x \neq 0$) e por $\operatorname{sen}^2 x$ (supondo $\operatorname{sen} x \neq 0$) obtemos, respectivamente,

$$1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$
$$\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Tendo em conta as definições das funções tangente, cotangente, secante e co-secante, as duas igualdades anteriores podem escrever-se da seguinte forma:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \tag{71}$$
$$\operatorname{cotg}^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x \tag{72}$$

6 Funções trigonométricas inversas

Nesta secção abordaremos o problema da inversão das funções trigonométricas[14]. Começamos por recordar brevemente o que se entende por inversa de uma função. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer e seja f uma função de A em B; significa isto que, a cada elemento a do conjunto A nós associamos um elemento b do conjunto B que designamos vulgarmente por $f(a)$. Suponhamos agora que a função f é bijectiva, ou seja, que verifica a condição seguinte: todo o elemento b do conjunto a é imagem de um e de

[14] As funções trigonométricas inversas, embora já tenham feito parte dos programas do ensino secundário, não constam dos actuais programas.

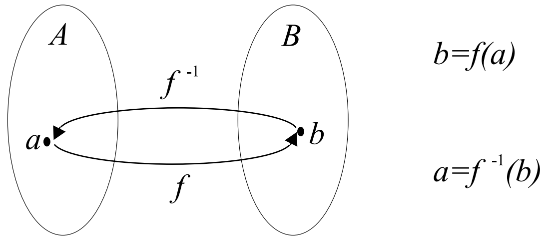

Figura 36: Função inversa.

um único elemento a do conjunto A. Em linguagem simbólica, dizer que $f : A \to B$ é bijectiva é dizer que:

$$\forall b \in B \quad \exists^1 a \in A \qquad b = f(a).$$

Tendo em conta a bijectividade de f, podemos definir uma nova função, agora de B em A, que a cada elemento b do conjunto B associa o *único* elemento a do conjunto A tal que $b = f(a)$. Esta nova função, a que chamaremos função inversa de f, será designada por f^{-1}. Na figura 36 representamos esquematicamente uma função bijectiva $f : A \to B$ e a sua inversa $f^{-1} : B \to A$. Claro que o domínio de f é o contradomínio de f^{-1} e o contradomínio de f é o domínio de f^{-1}, tendo-se

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a = f^{-1}(b) \quad \Leftrightarrow \quad b = f(a) \quad .$$

Por exemplo, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for a função definida por $f(x) = x^3$ (que é uma bijecção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$), a função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Suponhamos agora que A e B são dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ e que $f : A \to B$ é uma função bijectiva; como sabemos tem-se $f^{-1} : B \to A$. Como os conjuntos A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$, podemos pensar nos gráficos das funções f e f^{-1}; será que existe alguma relação de tipo geométrico entre estes dois gráficos? Por outras palavras, será que, conhecendo o gráfico de f, é possível determinar o gráfico de f^{-1}? Vamos ver que sim. Comecemos por relembrar que um ponto (a, b) do plano pertence ao gráfico de uma função real de variável real[15] φ sse a pertencer ao domínio de φ e $b = \varphi(a)$. Seja agora x um ponto no domínio A de f e seja $y = f(x)$; então o ponto do plano (x, y) pertence ao gráfico de f. Mas, da igualdade $y = f(x)$, concluímos, por definição de função inversa, que $x = f^{-1}(y)$; consequentemente o ponto (y, x) pertence ao gráfico da função f^{-1}. Aplicando um raciocínio análogo à função f^{-1}, vemos que (x, y) pertence

[15]Função com domínio e contradomínio contidos em $\mathbb{R}$.

ao gráfico de f sse (y, x) pertencer ao gráfico de f^{-1}. Mas, do ponto de vista geométrico, é fácil relacionar (x, y) com (y, x), tal como se indica na figura 37: são pontos simétricos um do outro em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares (ou seja, à recta de equação $y = x$).

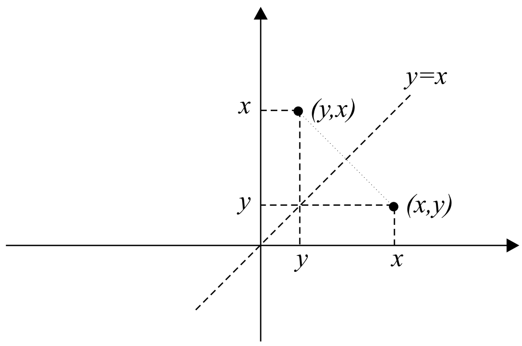

Figura 37: Pontos (x, y) e (y, x).

Torna-se agora evidente a relação de tipo geométrico entre os gráficos de f e de f^{-1}: são simétricos um do outro em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares. Na figura 38 esboçamos os gráficos de uma função f e da sua inversa f^{-1}.

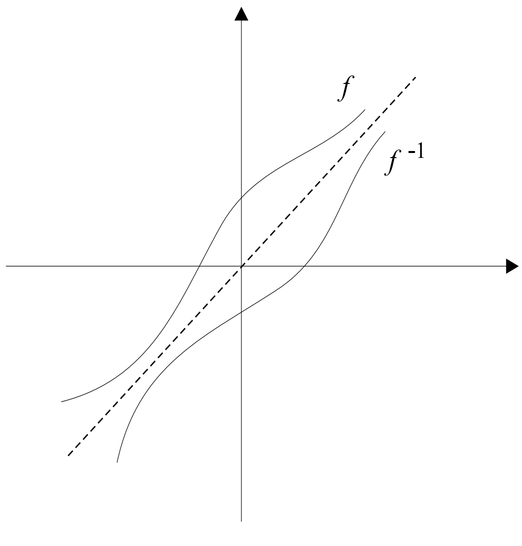

Figura 38: Funções f e f^{-1}.

6.1 Funções arco seno e arco co-seno

Consideremos a função seno; já sabemos tratar-se de uma função de $\mathbb{R}$ em $[-1, 1]$, que é sobrejectiva, e cujo gráfico está representado na figura 13. Como não se trata de uma função bijectiva (por não ser injectiva), não existe a sua inversa. Será então que devemos abandonar o problema da inversão das funções trigonométricas? Ou será que poderemos contornar a dificuldade resultante daquelas funções não serem injectivas? É esta segunda opção que adoptaremos.

A ideia é muito simples: a função seno não é invertível, visto não ser injectiva; então consideremos uma sua restrição a um intervalo convenientemente escolhido, por forma a obtermos uma função injectiva. Claro que há uma arbitrariedade na escolha desse intervalo. Por exemplo (ver figura 13), podemos escolher o intervalo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, ou o intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ou muitos outros intervalos. Convencionaremos escolher o intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

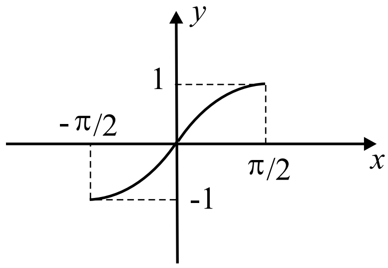

Figura 39: Gráfico da restrição do seno a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Designemos por f a restrição da função seno ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Trata-se de uma bijecção deste intervalo em $[-1, 1]$, cujo gráfico representamos na figura 39. A função f, por ser bijectiva, é invertível; à inversa de f chamamos função "arco seno". O arco seno será designado usualmente por arcsen. Dizer que y é o arco seno de x, é dizer que x é o seno de y e que y pertence ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{sen} y \ \wedge \ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \tag{73}$$

Vejamos um exemplo de aplicação da definição 73, calculando o arco seno de $\frac{1}{2}$. Trata-se do único número real y tal que $\operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$ e tal que $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Ora, como sabemos que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, vem $\operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

A função arco seno, por ser a inversa de uma função contínua e monótona num intervalo, é uma função contínua. O domínio do arco seno é o intervalo $[-1, 1]$ e o contradomínio é o intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. O arco seno é uma bijecção do primeiro daqueles intervalos no segundo. O gráfico do arco seno pode obter-se imediatamente a partir da figura 39, fazendo uma simetria em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares. Representamo-lo na figura 40.

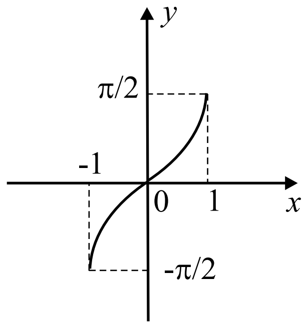

Figura 40: Gráfico da função arco seno.

Da análise do gráfico da função arco seno, representado na figura 40, resulta evidente que se trata de uma função ímpar. Aliás não poderia deixar de ser assim porque a função arco seno é a inversa da função que designámos por f, que é restrição do seno ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ora f é uma função ímpar e a inversa de uma função ímpar é também uma função ímpar. Tem-se então

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \text{arcsen}\,(-x) = -\ \text{arcsen}\ x \tag{74}$$

A função arco seno, por ser a inversa de uma função estritamente crescente, é estritamente crescente, como aliás se depreende imediatamente da figura 40:

$$\forall a, b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad a < b \quad \rightarrow \quad \text{arcsen}\ a < \text{arcsen}\ b \tag{75}$$

•
• •

O método utilizado para, partindo da função seno, obtermos a função arco seno pode ser adaptado à função co-seno. O primeiro passo é considerarmos, não a função co-seno, mas uma sua restrição a um intervalo conveniente, por forma a obtermos uma função injectiva. Seja g a restrição da função co-seno ao intervalo $[0, \pi]$, cujo gráfico representamos na figura 41.

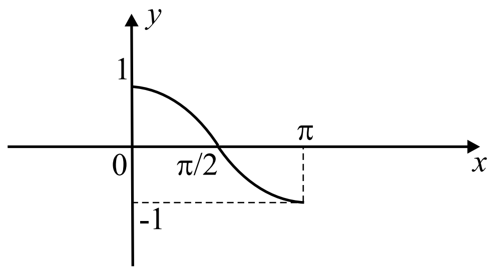

Figura 41: Gráfico da restrição do co-seno a $[0, \pi]$.

A função g é uma bijecção de $[0, \pi]$ em $[-1, 1]$. À inversa de g chamamos função arco co-seno; designa-la-emos usualmente por arccos. A função arco co-seno é uma bijecção de $[-1, 1]$ em $[0, \pi]$ e tem-se

$$y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y \ \wedge \ y \in [0, \pi] \tag{76}$$

O gráfico da função arco co-seno obtem-se imediatamente do gráfico da função g — representado na figura 41 — por simetria em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares. Representamo-lo na figura 42.

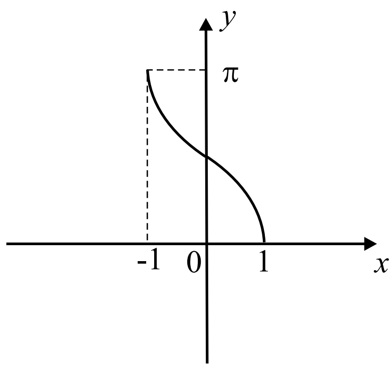

Figura 42: Gráfico da função arco co-seno.

A função arco co-seno é contínua porque é a inversa de uma função contínua e monótona definida num intervalo de $\mathbb{R}$. É estritamente decrescente, por ser a inversa de uma função estritamente decrescente:

$$\forall a, b \in [0, \pi] \quad a < b \qquad \Rightarrow \qquad \arccos a > \arccos b \tag{77}$$

7 Coordenadas polares

Consideremos um referencial ortonormado directo $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ no plano $\mathcal{P}$. Como é sabido, é possível associar a cada ponto P do plano $\mathcal{P}$ as coordenadas x e y desse ponto no referencial em questão. O processo de o fazer, que esquematizamos na figura 43, é simples. Começamos por traçar por P uma recta paralela ao vector $\mathbf{e}_2$ e designamos por A o ponto de intersecção dessa recta com a recta definida por $\mathbf{e}_1$; a abcissa do ponto P é, por definição, o único número real x tal que o vector $\overrightarrow{OA}$ é igual ao vector $x\mathbf{e}_1$. A ordenada de P é obtida de forma análoga, sendo o único número real y tal que $\overrightarrow{OB} = y\mathbf{e}_2$, onde B é a intersecção da recta paralela a $\mathbf{e}_1$ que passa por P e da recta definida por $\mathbf{e}_2$.

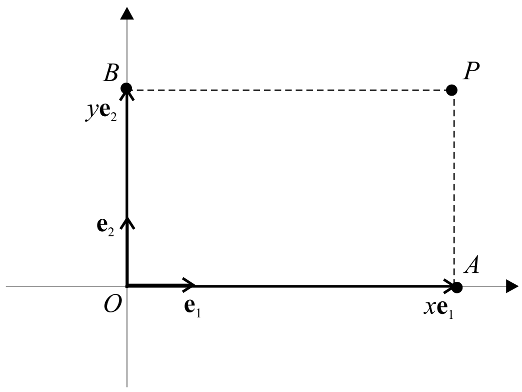

Figura 43: Coordenadas x e y do ponto P.

O que estamos a fazer, do ponto de vista metemático, ao associarmos a cada ponto P do plano as suas coordenadas x e y no referencial considerado? Estamos a definir uma função ψ que, a cada ponto do plano $\mathcal{P}$, associa um par ordenado de números reais, ou seja, um elemento de $\mathbb{R}^2$:

$$\psi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^2.$$

Dizer que x e y são as coordenadas do ponto P não é mais do que dizer que o par (x, y) é a imagem de P pela aplicação ψ:

$$\psi(P) = (x, y).$$

De acordo com o processo descrito para, a partir de P, determinar x e y, esta última igualdade é equivalente a

$$x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OP}.$$

A aplicação ψ é injectiva: se P e Q forem dois pontos distintos do plano $\mathcal{P}$, então, ou a abcissa de P é diferente da de Q, ou a ordeneda de P é diferente da de Q.

A aplicação ψ é sobrejectiva. De facto, dados dois números reais x e y, é sempre possível determinar um ponto P do plano cujas coordenadas sejam aqueles números. A construção, que podemos seguir na figura 43, é muito simples. Começa por se determinar os pontos A e B tais que $\overrightarrow{OA} = x\mathbf{e}_1$ e $\overrightarrow{OB} = x\mathbf{e}_2$; o ponto P é a intersecção da recta que passa por A e é paralela a $\mathbf{e}_2$ com a recta que passa por B e é paralela a $\mathbf{e}_1$.

A função $\psi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^2$ é então uma bijecção, porque é injectiva e sobrejectiva. Este facto permite-nos "identificar" cada ponto P do plano com o par ordenado (x, y) de números reais constituído pela abcissa e pela ordenada de P. Repare-se que esta "identificação" só tem sentido uma vez fixado o referencial $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ do plano. Por outras palavras, a aplicação ψ depende do referencial em questão.

Às coordenadas x e y do ponto P, dadas por $(x, y) = \psi(P)$, é usual chamar coordenadas cartesianas. Com elas podemos referenciar qualquer ponto do plano e, consequentemente, descrever figuras no plano. Por exemplo o rectângulo R representado na figura 44, onde a, b, c e d são números reais, com $a < b$ e $c < d$, é descrito em coordenadas cartesianas por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b \ \wedge \ c \le y \le d\}.$$

Repare-se que o sinal = é um abuso de linguagem. De facto, à sua esquerda está um subconjunto do plano — o rectângulo R — enquanto à direita está um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. O sinal = significa aqui que esse subconjunto de $\mathbb{R}^2$ é constituído precisamente pelas coordenadas dos pontos do rectângulo R, ou seja, pelos pares (x, y) tais que $(x, y) = \psi(P)$, com $P \in R$.

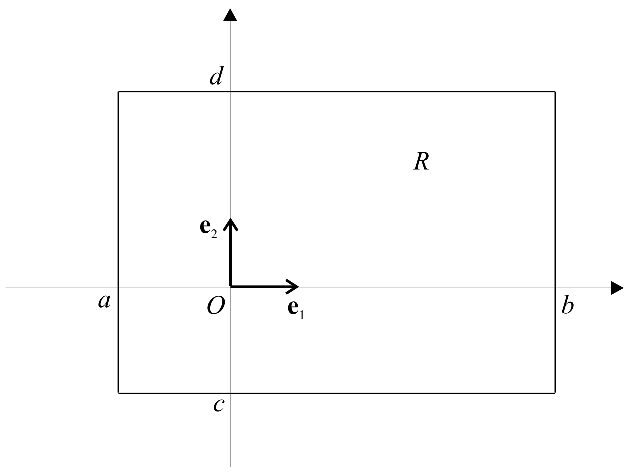

Figura 44: Rectângulo R.

Um outro exemplo, esquematizado na figura 45: o círculo C centrado na origem do referencial e de raio r. Tem-se, como é sabido,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

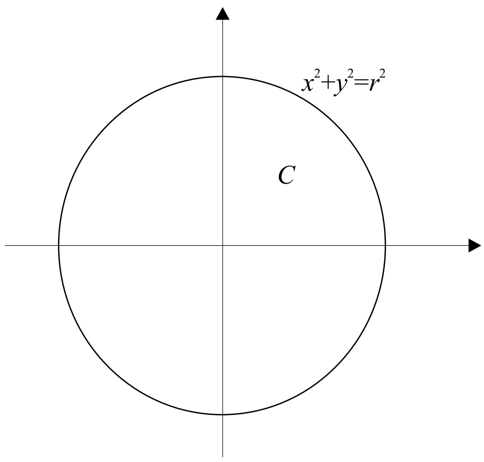

Figura 45: Círculo C.

Vejamos ainda outro exemplo: o quarto de círculo Q esquematizado na figura 46.

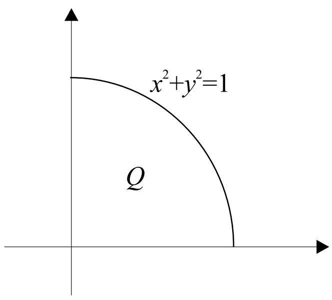

Figura 46: Quarto de círculo Q.

Este exemplo é um pouco mais complexo. Os ponto de Q têm abcissas compreendidas entre 0 e 1. Mas não são todos os pontos do plano com abcissas entre 0 e 1! De facto, a imagem geométrica do conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1\}$$

é a faixa representada na figura 47: são pontos com abcissas compreendidas entre 0 e 1 e com ordenadas quaisquer.

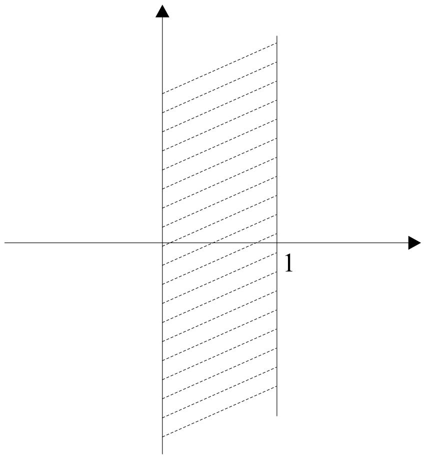

Figura 47: Faixa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\quad 0 \leq x \leq 1\}$.

Os pontos de Q têm as abcissas compreendidas entre 0 e 1; mas os pontos de Q de abcissa a (ver figura 48) têm ordenadas compreendidas entre 0 e a ordenada do ponto A da circunferência com essa mesma abcissa.

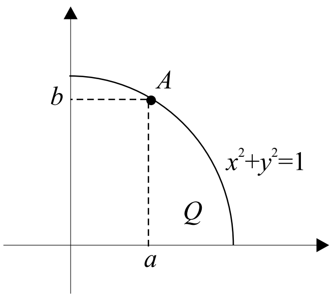

Figura 48: Abcissas dos pontos de Q com ordenada a.

Ora as coordenadas (a, b) de A verificam a equação

$$a^2 + b^2 = 1,$$

pelo que b, por ser positivo, é dado por

$$b = \sqrt{1 - a^2}.$$

Então os pontos de Q de abcissa x têm ordenadas compreendidas entre 0 e $\sqrt{1 - x^2}$. Logo:

$$Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1\ \wedge\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\right\}.$$

O exemplo que acabámos de descrever é mais complicado, mas poderíamos — mesmo com figuras simples — complicá-lo ainda mais. Basta considerar o sector circular S representado na figura 49.

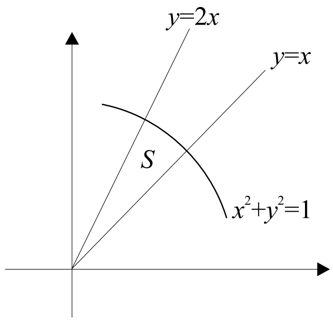

Figura 49: Sector circular S.

Aconselhamos vivamente o leitor a tentar verificar que

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \left(0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{5}} \ \wedge \ x \le y \le 2x\right) \right.$$
$$\left. \vee \quad \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}} \ \wedge \ x \le y \le \sqrt{1 - x^2}\right)\right\},$$

para o que lhe será útil observar que os pontos de intersecção das rectas de equação $y = x$ e $y = 2x$ com a circunfereência de equação $x^2 + y^2 = 1$ têm, respectivamente, as abcissas $\frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Com os exemplos anteriores pretendemos mostrar ao leitor que figuras simples — no nosso caso sectores circulares — podem ter uma descrição complicada em termos de coordenadas cartesianas. Este facto leva-nos à introdução de outro tipo de coordenadas: as coordenadas polares.

• • •

Voltemos a considerar o plano $\mathcal{P}$ e o referencial ortonormado directo $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Seja P um ponto do plano distinto de O. Ao ponto P podemos associar os seguintes dois números: a distância ρ de P a O e a medida (em radianos) θ do ângulo entre os vectores $\mathbf{e}_1$ e $\overrightarrow{OP}$.