Cálculo Diferencial e Integral I

11ª Ficha de problemas

Séries numéricas e séries de potências

---

1. Estude a natureza das seguintes séries numéricas:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad , \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2+\cos(n\pi)} \quad , \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^3+1}} \quad ,$$

2. Estude a natureza das seguintes séries numéricas e determine o valor da soma de uma das séries:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-e}{e^n} \quad , \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{3^n n!} \quad , \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}(\frac{1}{n^2}) \quad ,$$

3. Estude a natureza das seguintes séries numéricas e determine o valor da soma de uma das séries:

$$\text{i)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{(n-1)}}{5^n} \quad , \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^2+n} \quad , \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{+\infty} n \operatorname{sen}(\frac{1}{n}) \quad ,$$

4. Sendo $a_n > 0$ e $a_n \to +\infty$, estude a natureza das seguintes séries numéricas:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \quad , \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n + a_n}$$

5. Sendo $a_n > 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ convergente, mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$$

é também convergente.

6. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$. Determine a sua soma.

7. Estude a natureza de cada uma das séries seguintes e verifique se a convergência é absoluta.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + n^4}{e^n + n^3}$$

8. Determine o maior intervalo aberto onde são convergentes as séries

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} x^n \qquad \text{ii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-3x)^{2n}}{5^n(n+1)}$$

9. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(1-n)}(x+1)^{n+2}, \;\; x \in \mathbb{R}$

   i) Determine o intervalo de $\mathbb{R}$, onde a convergência da série é absoluta.
   ii) Determine a soma da série quando $x = 0$.