Cálculo Diferencial e Integral I

1ª Teste - (MEMec; MEAer)

8 de Novembro de 2008 - 11 horas

I.(7 val.)

1. Considere a sucessão de termos reais definida por:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{a_n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

   i) Mostre por indução matemática que a sucessão a_n é crescente.

   ii) A sucessão a_n é contractiva? Justifique.

   iii) Determine, se existir, o limite da sucessão a_n.

2. Considere a sucessão

$$u_n = \frac{n!}{n^n + 3^n} + \frac{n^2 \cos(n\pi)}{2n^2 + 1}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

   i) Determine o conjunto dos sublimites da sucessão u_n.

   ii) A sucessão u_n é limitada? Justifique.

II.(13 val.)

1. Considere a função $f :]-\infty, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) & \text{se } x \geq -1, \\ -xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

   i) A função é contínua em $]-\infty, 1]$? Justifique.

   ii) Mostre que não existe nenhuma sucessão x_n de termos em $[0, 1]$ tal que

$$f(x_n) = n^2, \qquad n \in \mathbb{N}$$

   iii) Defina a função derivada de f.

   iv) A função f é monótona em $]-\infty, -1[$? Justifique.

v) Escreva a equação da tangente ao gráfico da função f em $x = -2$.

vi) Representando por g a função inversa da restrição de f a $[-1/2, 1/2]$ determine $g'(0)$.

2. Mostre que equação

$$2x + e^x = 0.$$

tem solução e que essa solução é única.

3. Considere a função $h :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no domínio e tal que

$$h(\frac{1}{n+1}) = h(\frac{1}{n+2}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Admitindo que existe $\lim_{x\to 0} h'(x)$ indique o valor desse limite. Justifique.

Esboço da correção

I.(7 val.)

1. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{a_n}$.

   (a) a_n é crescente por indução matemática:

   - $a_2 = \frac{3}{2} > 1$.
   - Hipótese de indução: $a_{n+1} \geq a_n$.
     Tese: $a_{n+2} \geq a_{n+1}$.

   $$a_{n+2} \geq a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \sqrt{a_{n+1}} \geq \frac{1}{2} + \sqrt{a_n} \Leftrightarrow \sqrt{a_{n+1}} \geq \sqrt{a_n} \Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n.$$

   Como por hipótese de indução assume-se $a_{n+1} \geq a_n$, tem-se também $a_{n+2} \geq a_{n+1}$, c.q.m.

   (b) a_n é contractiva se existe $C \in]0,1[$ tal que

   $$|a_{n+2} - a_{n+1}| < C|a_{n+1} - a_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Temos

   $$|a_{n+2} - a_{n+1}| = a_{n+2} - a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}} < \frac{a_{n+1} - a_n}{2},$$

   já que a_n é crescente e $a_1 = 1$, logo $\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n} > 2$, para $n \in \mathbb{N}$. Assim, a_n é contractiva com $C = \frac{1}{2}$.

   (c) a_n é convergente, já que é contractiva. Como a_{n+1} é uma subsucessão de a_n, a_{n+1} também é convergente e $\lim a_{n+1} = \lim a_n$. Se $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$:

   $$\lim a_{n+1} = \lim \frac{1}{2} + \sqrt{a_n} = \frac{1}{2} + \sqrt{\lim a_n} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} + \sqrt{a} \Leftrightarrow$$
   $$a - \frac{1}{2} = \sqrt{a} \Leftrightarrow a^2 - a + \frac{1}{4} = a \Leftrightarrow a^2 - 2a + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$$
   $$a = \frac{2 \pm \sqrt{2+1}}{2} \Leftrightarrow a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \vee a = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

   Como a_n é crescente e $a_1 = 1$, tem-se $a > 1$, logo $a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

II.(13 val.)

Considere a função $f :]-\infty, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + \text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) & \text{se } x \geq -1, \\ -xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

i) Para $x > -1$, a função f é contínua pois resulta da soma e composta de funções elementares(polinomiais e inversa de trigonométrica). Para $x < -1$, a função f também é contínua pois resulta da produto e composta de funções elementares (polinomiais e exponencial). No entanto, $x = -1$ a função não é contínua, uma vez que

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{\sqrt{e}}{e} \neq f(-1) = -1 + \frac{\pi}{6}$$

ii) Se existisse uma sucessão x_n de termos em $[0, 1]$ tal que

$$f(x_n) = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então $f([0, 1])$ seria um conjunto não limitado. O que é impossível, uma vez f é uma função contínua em $[0, 1]$ e o intervalo $[0, 1]$ é fechado e limitado.

iii) Para $x > -1$, a função f é diferenciável pois resulta da soma e composta de funções elementares(polinomiais e inversa de trigonométrica). Para $x < -1$, a função f é também diferenciável pois resulta da produto e composta de funções elementares (polinomiais e exponencial). No entanto, para $x = -1$ a função não sendo contínua também não é diferenciável.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} & \text{se } x > -1, \\ e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1) & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

iv) A função f é monótona(estritamente crescente em $]-\infty, -1[$. Uma vez que $f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1) > 0$ para $x \in]-\infty, -1[$.

v) A equação da tangente ao gráfico da função f em $x = -2$ é:

$$y = f(-2) + f\Delta(-2)(x + 2), \quad \text{sendo} f(-2) = 2e^{-2} \quad \text{e} \quad f'(-2) = 3e^{-2}.$$

vi) Sendo g a função inversa da restrição de f a $[-1/2, 1/2]$,

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = 2/3, \quad \text{sendo} g(0) = 0 \quad \text{e} \quad f'(0) = 3/2.$$

Seja $f(x) = 2x + e^x$. Uma vez que h é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e $f(-2)f(0) < 0$, do teorema de Bolzano conclui-se que f anula-se pelo menos uma vez em $]-2, 0[$. Sendo $f'(x) = 2 + e^x > 0$, f é estritamente crescente e consequentemente injectiva, assim o zero de f em $]-2, 0[$ é único (i.e. a solução de $2x + e^x = 0$ é única).

Considere a função $h :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no domínio e tal que

$$h(\frac{1}{n+1}) = h(\frac{1}{n+2}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando o teorema de Rolle a h em $\overline{I_{n_1}} = [1/(n+2), 1/(n+1)]$, tem-se a existência de $\xi_1 \in I_{n_1}$, tal que $h\Delta(\xi_1) = 0$.
Do teorema de Rolle Admitindo que existe $\lim_{x \to 0} h'(x)$ indique o valor desse limite. Justifique.