Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste - (MEMec; MEAer)

13 de Novembro de 2010 - 11 horas

I (7 val.)

1. (3 val.) Considere a sucessão definida em $[0, 1/2]$

$$u_1 = 0, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{4}\left(u_n^2 + 1\right) \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Mostre por indução matemática que a sucessão u_n é monótona.

(ii) Analise a existência de limite da sucessão u_n e, caso exista, determine-o.

2. (4 val.) Sejam as sucessões

$$v_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n \left(\frac{4^n n!}{n^n}\right)^{-\frac{1}{n}}, \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

e

$$w_n = v_n + \frac{n^3 + 3^n}{n^4 + \beta^n}, \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Determine o limite da sucessão v_n.

(ii) Determine o subconjunto de $\mathbb{R}^+$ a que deve pertencer o parâmetro β para que a sucessão w_n seja convergente em $\mathbb{R}$. Determine o limite da sucessão w_n para esses valores de β.

(ii) Se $\beta = 3$ existem subsucessões de w_n divergentes? Justifique. Indique o conjunto dos sublimites de w_n.

II (13 val.)

1. (8 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & \text{se } x \leq 1. \\ \ln\left[(\ln x)\left(\arctan\left(1 + e^x\right)\right)\right], & \text{se } x > 1; \end{cases}$$

(i) Mostre que f não é diferenciável no ponto 1.

(ii) Defina a função derivada de f.

(iii) Determine os intervalos de monotonia e os extremos de f em $]-\infty, 1[$.

v.s.f.f.

(iv) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(0) = -1$ e $g'(0) = 1 + e$. Determine $(f \circ g)'(0)$.

(v) Existe função inversa de f em $]1, +\infty[$? Justifique. Determine a derivada em $\ln\left[(\ln 2)\left(\arctan\left(1 + e^2\right)\right)\right]$ da função inversa de f.

2. (3.0 val.) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$(i) \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}, \qquad (ii) \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1}.$$

3. (2 val.) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e $a, b \in \mathbb{R}^+$ tais que

$$b^2 f(a) = a^2 f(b).$$

Mostre que a equação

$$x f'(x) = 2 f(x)$$

tem pelo menos uma solução em $\mathbb{R}^+$.