Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste - (MEMec; MEAer)

13 de Novembro de 2010 - 11 horas

I (7 val.)

1. (3 val.)

(i) Mostre-se por indução matemática que a sucessão u_n é crescente ou seja que $u_{n+1}-u_n \geq 0$. Para $n=1$, tem-se $u_2-u_1 = 1/4 > 0$. Para $n=m$, mostre-se que se $u_{m+1}-u_m \geq 0$ então $u_{m+2}-u_m \geq 0$.
Assim
$$u_{m+2}-u_m = \frac{1}{4}\left(u_{m+1}^2+1\right) - \frac{1}{4}\left(u_m^2+1\right) =$$
$$\frac{1}{4}\left(u_{m+1}^2-u_m^2\right) = \frac{1}{4}\left(u_{m+1}+u_m\right)\left(u_{m+1}-u_m\right) \geq 0$$
uma vez que $u_n > 0$ e da hipótese de indução $(u_{m+1}-u_m \geq 0$.

(ii) A sucessão u_n é convergente, dado que de (i), u_n é monótona e como $0 \leq u_n \leq 1/2$, u_n é limitada. Represente-se o limite de u_n por u.
Toda a subsucessão de u_n é convergente, em particular $u_{n+1} \to u$. Por outro lado a sucessão $\frac{1}{4}\left(u_n^2+1\right)$ também é convergente e o seu limite é $\frac{1}{4}\left(u^2+1\right)$, vindo
$$u = \frac{1}{4}\left(u^2+1\right) \Leftrightarrow u^2-4u+1=0$$
Concluindo-se que $u = 2-\sqrt{3}$ uma vez que $0 \leq u_n \leq 1/2$.

2. (4 val.)

(i)
$$\lim v_n = \lim\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n \lim\left(\frac{4^n n!}{n^n}\right)^{-\frac{1}{n}} = 1.\frac{e}{4} = \frac{e}{4}$$
uma vez que
$$\lim\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n = \lim\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{-1/n} = e^0 = 1$$

e

$$\lim \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{4^n n!}} = \frac{1}{4}\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{4}$$

(ii) Tem-se

$$u_n = \frac{n^3+3^n}{n^4+\beta^n} = \left(\frac{3}{\beta}\right)^n \frac{n^3/3^n+1}{n^4/\beta^n+1}$$

Para $\beta > 3$, a sucessão u_n é convergente em $\mathbb{R}$ para zero, tendo em conta que $\lim \dfrac{n^a}{c^n} = 0\,,\ \ a>0, c>1$ e que para $-1 < d \leq 1$, d^n é convergente em $\mathbb{R}$. Sendo w_n a soma de 2 sucessões convergentes, w_n converge para $\frac{e}{4}$
Para $\beta = 3$, a sucessão u_n é convergente em $\mathbb{R}$ para 1, uma vez que que $\lim u_n = \lim \dfrac{n^3/3^n+1}{n^4/3^n+1} = 1$ e w_n converge para $\frac{e}{4}+1$
Para $1 < \beta < 3$, $u_n \to +\infty$ sendo divergente em $\mathbb{R}$.
Para $0 < \beta \leq 1$,

$$u_n = \frac{n^3}{n^4+\beta^n} + \frac{3^n}{n^4+\beta^n}$$

$u_n \to +\infty$, uma vez que $\dfrac{n^3}{n^4+\beta^n} \to 0$ e $\dfrac{3^n}{n^4+\beta^n} \to +\infty$

(iii) Para $\beta = 3$, w_n é convergente logo todas as subsucessões de w_n são convergentes, sendo o conjunto dos sublimites de w_n o conjunto singular $\{\frac{e}{4}+1\}$.

II (13 val.)

1. (8 val.)

(i)

$$\lim_{x\to 1^+} \ln\left[(\ln x)\left(\arctan\left(1+e^x\right)\right)\right] = \ln\left[(\ln 1)\left(\arctan\left(1+e^1\right)\right)\right] = -\infty$$

f não é contínua no ponto 1 logo f não é diferenciável no ponto 1.

(ii) Para $x > 1$ a função é diferenciável pois resulta do produto e composição de funções diferenciáveis. Para $x < 1$ a função é diferenciável pois resulta da composição de funções diferenciáveis.
$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} -2xe^{-x^2}, & \text{se } x < 1. \\ \dfrac{1}{x\ln x} + \dfrac{e^x}{(1+(1+e^x)^2)\,\mathrm{arctg}(1+e^x)}, & \text{se } x > 1; \end{cases}$$

(iii) Para $x < 1$, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

para $0 < x < 1$ $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f é uma função crescente.
para $x < 0$ $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f é uma função decrescente.
A função f em $x = 0$, tem máximo.

(iv) Sendo $g(0) = -1$ e $g'(0) = 1 + e$, tem-se

$$(f \circ g)'(0) = f'(g(0)).g'(0) = 2e^{-1}(1+e) = 2e^{-1} + 2$$

.

(v) Para $x > 1$ tem-se $f'(x) > 0$ concluindo-se que f é uma função estritamente crescente para $x > 1$. Consequentemente f é injectiva e tem inversa. Seja $g = f^{-1}$

$$g'(\ln\left[(\ln 2)\left(\arctan\left(1+e^2\right)\right)\right]) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\dfrac{1}{2\ln 2} + \dfrac{e^2}{(1+(1+e^2)^2)\,\mathrm{arctg}(1+e^2)}}$$

já que $g'(d) = 1/f'(c)$, $d = f(c)$.

2. (3.0 val.)

$$(i)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{sen}\, x^2}{x} = 0,$$

da regra de Cauchy, uma vez que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\mathrm{sen}\, x^2)'}{x'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\cos x^2}{1} = 0$$

$$(ii)\ \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} = e^0 = 1$$

de facto, uma vez que

$$\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} = e^{\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln(\frac{x}{x-1})}$$

e da regra de Cauchy, pois

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\left(\ln(\frac{x}{x-1})\right)'}{\left((x-1)^{-1}\right)'} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x} = 0$$

3. (2 val.) Tem-se

$$b^2 f(a) = a^2 f(b) \Rightarrow \frac{f(a)}{a^2} = \frac{f(b)}{b^2}$$

Seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$. Como g é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$ e $g(a) = g(b)$ do teorema de Rolle existe $c \in]a,b[$ tal que $g'(c) = 0$.
Ora

$$g'(x) = \frac{x^2 f'(x) - 2x f(x)}{x^4}$$

vindo que

$$\underset{c\in]a,b[}{\exists} \quad \frac{cf'(c) - 2f(c)}{c^3} = 0$$

e finalmente que

$$\underset{c\in]a,b[}{\exists} \quad cf'(c) = 2f(c)$$