Cálculo Diferencial e Integral I

Complementos ao texto de apoio às aulas.

Amélia Bastos, António Bravo

Julho 2014

Introdução

O texto apresentado tem por objectivo ser um complemento ao texto de apoio ao curso de Cálculo Diferencial e Integral I do Mestrado em Engenharia Mecânica. Consiste em três seções que complementam a matéria apresentada nas aulas teóricas da referida disciplina. Cada secção termina com um conjunto de exercícios alguns dos quais resolvidos.

Amélia Bastos

António Bravo

1 Séries de Taylor

Comece-se por recordar o que é uma série de potências. Sendo $a_0, a_1, \ldots, a_n$ uma sucessão e x uma variável real chama-se *série de potências* de $x \in \mathbb{R}$, com coeficientes reais $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \, .$$

Diz-se que a série converge em $x_0 \in \mathbb{R}$ se e só se for convergente a série de termos numéricos $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$; caso contrário, será divergente. Chama-se *domínio de convergência* ao conjunto dos valores reais de x para os quais a série é convergente.
Recorde-se também que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, em que exista $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ é absolutamente convergente no intervalo $]-r, r[$, em que

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \, .$$

Nos pontos exteriores ao mesmo intervalo a série é divergente.

Tal como um polinómio define uma função de variável real em $\mathbb{R}$, uma série de potências define uma função no subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a série é convergente, precisamente a função que em cada ponto desse conjunto tem por valor a soma da série no ponto considerado.
Analisemos essa função no que respeita à diferenciabilidade.

Teorema 1.1. *Seja* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *uma série de potências com raio de convergência* $r > 0$ *e seja* f *a função definida pela igualdade*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

no dominio de convergência da série. Nestas condições, f *é diferenciável no intervalo* $]-r, r[$ *e tem-se para* $x \in]-r, r[$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \, .$$

Demonstração.

Observe-se, em primeiro lugar, que as séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, têm o mesmo raio de convergência, uma vez que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Seja

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} .$$

Pretende-se provar que para qualquer $c \in]-r, r[$ se tem $f'(c) = \varphi(c)$, i.e

$$\lim_{x\to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \varphi(c) \right] = 0$$

$$f(x) - f(c) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(x^n - c^n\right) = (x - c) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(x^{n-1} + c x^{n-2} + \ldots + c^{n-1}\right) .$$

assim

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \varphi(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n c^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x)$$

em que

$$\alpha_n(x) = a_n \left(x^{n-1} + c x^{n-2} + \ldots + c^{n-1} - n c^{n-1}\right)$$

Escolha-se b tal que $|c| < b < r$. Para $|x| \le b$ tem-se

$$|\alpha_n(x)| \le |a_n| \left(b^{n-1} + b b^{n-2} + \ldots + b^{n-1} + n b^{n-1}\right) = 2n|a_n| b^{n-1}$$

Como b pertence ao intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ conclui-se que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, b^{n-1}$ é convergente. Portanto fixado arbitráriamente $\delta > 0$ existirá decerto $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} 2n|a_n| b^{n-1} < \delta/2$$

Tem-se assim imediatamente para $|x| \le b$

$$\left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} \alpha_n(x) \right| < \delta/2 .$$

Por outro lado, como a soma $\sum_{n=1}^{p} \alpha_n(x)$ é um polinómio em x, e portanto uma função contínua, que se anula no ponto c visto que neste ponto se anulam todas as funções

$\alpha_n(x)$ existirá também sempre uma vizinhança $V_\epsilon(c)$ que podemos supor contida no intervalo $]-b, b[$, tal que

$$x \in V_\epsilon(c) \Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{p} \alpha_n(x)\right| < \delta/2$$

Nestas condições, para todo $x \in V_\epsilon(c)$ ter-se-á

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \varphi(c)\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x)\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{p} \alpha_n(x)\right| + \left|\sum_{n=p+1}^{+\infty} \alpha_n(x)\right| < \delta/2 + \delta/2 = \delta$$

o que permite reconhecer tal como se pretendia que

$$\lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \varphi(c)\right] = 0$$

■

Observação 1.2. *Este teorema equivale a afirmar que nos pontos interiores ao domínio de convergência, uma série de potências pode derivar-se termo a termo.*

Por exemplo sendo

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots, \quad |x| < 1$$

tem-se por derivação

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} + \ldots, \quad |x| < 1$$

Este teorema permite assim obter novas demonstrações de algumas regras de derivação. Por exemplo

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x$$

pois a série tem raio de convergência infinito.

As funções $f : D \to \mathbb{R}$, com $0 \in \text{int} D$, que podem ser representadas nalguma vizinhança de 0 por séries de potências de x com raio de convergência $r \neq 0$ são designadas por **funções analiticas** em 0.
Mais geralmente tem-se:

Definição 1.3. *A função $f : D \to \mathbb{R}$ diz-se analitica em $a \in intD$ se e só se existir $\epsilon > 0$ e uma sucessão real a_n, $n \in \mathbb{N}$, tais que para qualquer $x \in V_\epsilon(a)$ se tem*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$$

Em particular no caso da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ter raio de convergência infinito, i.e. ser convergente para $x \in \mathbb{R}$, a função por ela definida diz-se uma *função inteira*. Note-se que muitas funções que intervêm nas aplicações da Matemática às outras Ciências são analiticas em todos os pontos do seu dominio, com excepção de alguns "pontos criticos".

Exemplo 1.4. *Qualquer função polinomial*

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2\,, \qquad c_i \in \mathbb{R}\,,\ i = 0, 1, 2\,,$$

é analítica em $a \in \mathbb{R}$.

Qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$ tem-se

$$p(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2, \quad \text{com } b_2 = c_2\,,\ b_1 = c_1 + 2ac_2\,,\ b_0 = c_0 + ac_1 + a^2 c_2$$

p é portanto representável por uma série de potências de $x - a$ numa vizinhança do ponto a que poderá ser fixado arbitrariamente.

Exemplo 1.5. *A função $f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$ é analítica em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Com efeito tem-se*

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{a + (x-a)} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1 - \left(-\dfrac{x-a}{a}\right)}\,,$$

Como

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n, \quad |r| < 1\,,$$

vem

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-a)^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(x-a)^n$$

desde que $a \neq 0$ e $\left|\frac{x-a}{a}\right| < 1$, i.e. $x \in V_\epsilon(a)\,,\ \epsilon \leq |a|$.

Refira-se agora um resultado importante de demonstração imediata

Corolário 1.6. *Qualquer função definida por uma série de potências de* $x - a$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$, *com raio de convergência* $r > 0$, *é indefinidamente diferenciável em* $]a-r, a+r[$ *e as suas derivadas podem obter-se derivando a série termo a termo; Em particular qualquer função analítica em* a *é indefinidamente diferenciável em alguma vizinhança de* a *e todas as suas derivadas são funções analíticas em* a.

Pode-se colocar a seguinte questão: *Poderá uma função analítica em* a *ser representada em alguma vizinhança desse ponto por duas séries distintas de potências de* $x - a$ *?*. A resposta é negativa. Veja-se porquê.
Se se tiver para qualquer x de certa vizinhança de a

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

ter-se-á também na mesma vizinhança

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} + \ldots$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)!a_{n+1}(x-a) + \ldots$$

Atribuindo nas igualdades anteriores a x o valor a tem-se

$$a_0 = f(a)\,, \quad a_1 = f'(a)\,, \quad \ldots \quad n!a_n = f^{(n)}(a)$$

i.e. os coeficientes a_n , $n \in \mathbb{N}$ exprimem-se nos valores de f e das suas derivadas no ponto a. Como estas derivadas são univocamente determinadas o mesmo se passará com os coeficientes a_n.

Proposição 1.7. *Se numa vizinhança de* a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

então $a_n = b_n$ *para qualquer* $n \geq 0$.

Assim sendo f analítica em a, tem a representação única em série de potências $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ em que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Qualquer que seja a função f indefinidamente diferenciável em a pode construir-se esta série. Note-se contudo que para os coeficientes da série tenham sentido não é necessário supor que a função seja analítica no ponto a; Com efeito sempre que uma função seja indefinidamente diferenciável em a poderá formar-se a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

que se designa por *série de Taylor* da função f em $a \in \mathrm{int}D$ (*série de Mac-Laurin* de f quando $a = 0$).

Naturalmente que se coloca a seguinte questão:
Será que qualquer função indefinidamente diferenciável num ponto a é analítica nesse ponto?
Ver-se-á através de um exemplo simples que a resposta a esta questão é negativa, uma vez que para $a \in \mathrm{int}D$ a existência dos valores $f^{(n)}(a)$, $n \in \mathbb{N}_0$, embora permite escrever a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, não garante que em alguma vizinhança de a seja verificada a igualdade

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(no caso da igualdade não se verificar a função f não será analítica no ponto a, visto que nenhuma série distinta da sua série de Taylor pode representar a função numa vizinhança de a).

Exemplo 1.8. *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & se \quad x \neq 0 \\ 0 \quad se & x = 0. \end{cases}$$

Uma vez que qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}\, p(\frac{1}{x}) = 0$$

onde p *é o polinómio em* $1/x$ *de grau* $n+2$ *determinado pelas sucessivas derivadas de* f *a série de Taylor de* f *em potências de* x*terá todos os coeficientes* a_n *iguais a zero e portanto a sua soma será nula para qualquer* $x \in \mathbb{R}$. *Assim para* $x \neq 0$

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

o que mostra que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *não é uma função analítica em* 0.

Depois de se provar a existência de funções indefinidamente diferenciáveis que não são analíticas (em algum ponto) põe-se naturalmente a seguinte questão:
Que condições suplementares devem ser impostas a uma função f indefinidamente diferenciável numa vizinhança do ponto a, para que fique garantida a analiticidade de f nesse ponto?

Teorema 1.9. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in intD$ e f uma função indefinidamente diferenciável em todos os pontos de uma vizinhança de a, $V_\epsilon(a)$ (i.e. $f \in C^\infty(V_\epsilon(a))$) e seja $x \in V_\epsilon(a)$. Designando por $R_n(x)$ o termo complementar da fórmula de Taylor de f, relativa ao ponto a e ao natural n, é necessário e suficiente para que se verifique*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

que se tenha

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

(f é analítica em a se e só se quando $x \to \infty$, $R_n(x)$ converge para 0 em alguma vizinhança de a).

Demonstração. Sendo $f : D \to \mathbb{R}$ uma função da classe C^∞ em $V_\epsilon(a)$ para cada $x \in D$ e cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

em que $P_n(x)$ é o polinómio de Taylor de f de grau n no ponto a e $R_n(x)$ o termo complementar correspondente.
Se observarmos porém que o polinómio $P_n(x)$ é precisamente a soma dos primeiros $n+1$ termos da série de Taylor de f, tornar-se-á evidente que, para que esta série convirga em determinado ponto $x_0 \in D$ e tenha por soma o valor $f(x_0)$ i.e.

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x_0).$$

é necessário e suficiente que se tenha

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x_0) - P_n(x)) = 0.$$

■

Na prática contudo nem sempre é fácil verificar se $R_n(x)$ converge ou não para 0 quando $n \to \infty$. Neste sentido é útil o seguinte resultado

Teorema 1.10. *Seja $f \in C^\infty(V_\epsilon(a))$ e suponha-se que existe $p \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{R}$ tais que para todo $x \in V_\epsilon(a)$ e todo $n > p$*

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq k$$

Então a série de Taylor de f relativa ao ponto a tem por soma $f(x)$ para $x \in V_\epsilon(a)$,.

Demonstração. Sendo $x \in V_\epsilon(a)$ tem-se, o termo complementar da fórmula de Taylor, como resto de Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\,, \qquad c \in]a, x[$$

Nas condições da hipótese ter-se-á então, para $c \in V_\epsilon(a)$

$$\left|R_(x)\right| = \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq k\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} < k\frac{\epsilon^{n+1}}{(n+1)!}$$

Qualquer que seja $\epsilon > 0$ tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\epsilon^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

e pelo teorema anterior

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

■

Mais geralmente pode mostrar-se que se $f \in C^\infty(V_\epsilon(a))$ e se existirem números reais M e k tais que para cada $x \in V_\epsilon(a)$ e todo $n \in \mathbb{N}$

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq Mk^n$$

então para $x \in V_\epsilon(a)$ a série de Taylor de f relativa ao ponto a tem por soma $f(x)$.

Exemplo 1.11. *Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$.*
Tem-se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\operatorname{sen}(x + n\frac{\pi}{2})\right| \leq 1$. Em particular:

$$f^{(2n)}(0) = \operatorname{sen}(0 + 2n\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$f^{(4n-1)}(0) = \operatorname{sen}(0 + (4n-1)\frac{\pi}{2}) = -1$$

$$f^{(4n+1)}(0) = \operatorname{sen}(0 + (4n+1)\frac{\pi}{2}) = 1\,.$$

Assim o teorema anterior permite concluir que a função f coincide com a soma da sua série de Taylor para $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Exemplo 1.12. *Seja $f(x) = e^x \cos x$. Tem-se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$,*

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \cos(x + n\pi/4)\,.$$

Tem-se

$$|R_{n-1}(x)| = \frac{\left|f^{(n)}(c)\right| |x|^n}{n!} = \frac{|x|^n}{n!}(\sqrt{2})^n e^{c_n} \left|\cos(c_n + n\pi/4)\right| \leq \frac{|x|^n}{n!}(\sqrt{2})^n e^{c_n}\,, \qquad c_n \in]0, x[$$

Para $x > 0$

$$\frac{|x|^n}{n!}(\sqrt{2})^n e^{c_n} < \frac{|x|^n}{n!}(\sqrt{2})^n e^{x} \longrightarrow 0$$

Do do teorema anterior a função f coincide com a soma da sua série de Taylor para $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}(\sqrt{2})^n \cos(n\pi/4)\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Exerc 1.13. *Indique a série de Taylor em potências de x das funções indicadas, bem como o maior intervalo de $\mathbb{R}$ em que a série representa a função*

i) $f(x) = \ln(1+x)$

ii) $g(x) = \operatorname{arctg} x$

Resolução.

i) É mais simples determinar a série de Taylor da derivada da função f por intermédio da série geométrica.

$$f'(x) = (\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^n\,, \qquad x \in]-1, 1[$$

Primitivando ambos os termos da igualdade anterior, tem-se

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{n+1} + C\,, \qquad x \in]-1, 1[$$

De $\ln(1+0) = 0$ deduz-se que $C = 0$.

ii) Procedendo de forma análoga ao exercício anterior, vem

$$g'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^{2n}\,, \qquad x \in]-1,1[$$

Primitivando ambos os termos da igualdade anterior, tem-se

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1} + C\,, \qquad x \in]-1,1[$$

De $\operatorname{arctg} 0 = 0$ deduz-se que $C = 0$.

■

Exerc 1.14. *Indique a série de Taylor em potências de $x-1$ associada à função*

$$f(x) = (x-1)3^x$$

e o maior intervalo aberto em que a série representa a função.
Determine $f^{(2)}(1)$.

Resolução. Para calcular a série de Taylor de uma função como f, vai-se simplesmente recorrer-se à série conhecida da função exponencial e^x. Assim para qualquer $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 3(x-1)3^{x-1} = 3(x-1)e^{(x-1)\ln 3} = 3(x-1)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n \ln^n 3}{n!} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^{n+1} \ln^n 3}{n!}\,.$$

De

$$\frac{f^{(n+1)}(1)}{(n+1)!} = \frac{3\ln^n 3}{n!}$$

tem-se as derivadas da função f para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n+1)}(1) = (n+1)3\ln^n 3$$

concluindo-se que

$$f^{(2)}(1) = 6\ln 3$$

■

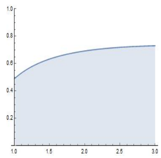
2 Áreas de figuras planas

Nesta secção apresenta-se um conjunto de exercícios práticos de cálculo de áreas de figuras planas.

Exerc 2.1.
Calcule a área da região plana limitada pelas linhas definidas pelas equações

$$y = 0 \qquad , \qquad y = \frac{\log 2x}{\sqrt{2x}} \qquad e \qquad x = \frac{e}{2} \ .$$

Resolução.
Um esboço da região,



Designando por A a área da região pretendida, tem-se

$$A = \int_{1/2}^{e/2} \frac{\log 2x}{\sqrt{2x}}\, dx = \left[\sqrt{2x}\log 2x\right]_{1/2}^{e/2} - \int_{1/2}^{e/2} \frac{2}{\sqrt{2x}}\, dx = \sqrt{e} - \left[2\sqrt{2x}\right]_{1/2}^{e/2} = 2 - \sqrt{e}\,.$$

■

Exerc 2.2.
Calcule a área da região plana limitada pelas linhas definidas pelas equações

$$x = y^2 \qquad e \qquad x^2 = -8y \ .$$

Resolução.
A figura seguinte descreve a fronteira da região em questão

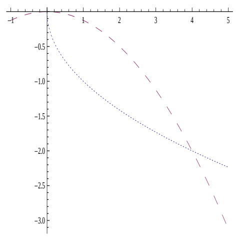
Estabelecendo $-\sqrt{x} = -x^2/8$ tem-se $x = 0 \vee x = 4$, assim a a seguinte expressão para aárea da região plana

$$\int_0^4 -x^2/8 - (-\sqrt{x})\, dx\,.$$

vindo, da fórmula de Barrow,

$$\int_0^4 -x^2/8 - (-\sqrt{x})\, dx = 2\left[-\frac{x^3}{24} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\,.$$

■



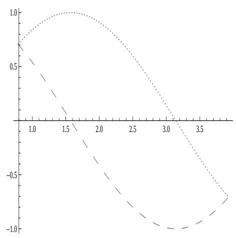
Exerc 2.3.

Calcule a área da região plana A definida por

$$A = \{(x, y) \in^2 : \ \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \ \wedge \ \cos x \leq y \leq \operatorname{sen} x\}\,.$$

Resolução.

A figura seguinte descreve a fronteira da região A



A área da região A é dada por:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \operatorname{sen} x - \cos x \; dx\,.$$

Tem-se, pela fórmula de Barrow, que

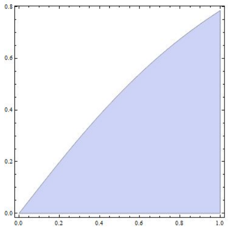
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \operatorname{sen} x - \cos x \; dx = [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\,.$$

■

Exerc 2.4. *Calcule a área da região plana limitada pelo gráfico da função* $f(x) = \operatorname{arctg} x$ *pelas rectas* $x = 1$ *e* $y = 0$.

Resolução.

Apresentando a região plana limitada pelo gráfico da função $f(x) = \operatorname{arctg} x$ pelas rectas $x = 1$ e $y = 0$.



O valor da área da região apresentada é obtido por

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$$

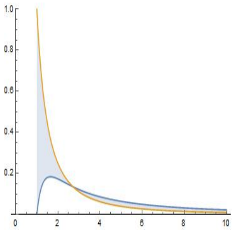
$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = (\text{Int.por partes}) = [\operatorname{arctg} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \ln 2)$$

■

Exerc 2.5. *Calcule a área da região plana situada na região* $1 \leq x \leq e^2$ *e limitada pelas curvas* $y = \ln x/x^2$ *e* $y = 1/x^2$*.*

Resolução.



As curvas cruzam-se em $x = e$ na região $x \geq 1$, e $\ln x < 1$ para $1 \leq x < e$. A área da referida região é

$$\int_1^e \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) dx + \int_e^{e^2} \left(\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{e} + \left(\frac{1}{e} - \frac{2}{e^2}\right) = \frac{2}{e}\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

uma vez que

$$\int_1^e \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) dx = \int_1^e \frac{1}{x^2}(1-\ln x) dx = (\text{int. por partes}) =$$

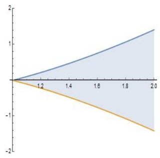
$$= \left[-\frac{1}{x}(1-\ln x)\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x}(-\frac{1}{x}) dx = 1 + \left[\frac{1}{x}\right]_1^e = \frac{1}{e}.$$

e o segundo integral obtém-se diretamente dos cálculos anteriores.

■

Exerc 2.6. *Calcule a área da região limitada pela curva de equação* $y^2 = x(1-x)^2$ *e as retas* $x = 0$ *e* $x = \frac{1}{2}$.

Resolução. Esboçando a região tem-se,



A área da região é

$$2\int_0^{1/2} \sqrt{x(1-x)^2}dx = 2\left(\int_0^{1/2} x^{1/2}dx - \int_0^{1/2} x^{3/2}dx\right) = .$$

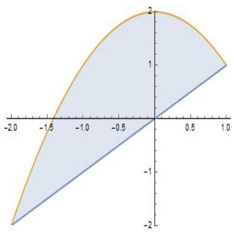
$$= 2\left(\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^{1/2} - \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^{1/2}\right) = \frac{7}{30}\sqrt{2}.$$

■

Exerc 2.7. *Calcule a área do seguinte subconjunto de* $\mathbb{R}^2$*:*

$$\left\{(x,y) \in^2 \colon\ x \leq y \leq -x^2 + 2 \ \right\}.$$

Resolução.



A área do subconjunto de $\mathbb{R}^2$ é

$$\int_{-2}^{1} (-x^2 + 2) - xdx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

■

Bibliografia

[1] J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Gulbenkian, 8a ed., 2005.

[2] W. Trench, *Introduction to Real Analysis*, Trinity University, 2003.

[3] A. Ferreira dos Santos, *Análise Matemática I e II,* Texto de apoio às aulas, AEIST, 1994-95.