Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2^{o} TESTE / 1^{o} EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

LMAC, LEFT, LEBM, LCI

14 de Janeiro de 2002 Duração: 1h 30 (teste) / 3h (exame)

TESTE: APENAS III, IV e V(a) — EXAME: TODOS OS GRUPOS

I - APENAS EXAME

Considere a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine a solução geral de $A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{b} = (0, 3, 0)^T$.

b) Determine a dimensão e uma base para $\mathcal{N}(A)$ (sug. utilize a alínea anterior).

c) Determine bases para os espaços das linhas e das colunas de A, bem com as respectivas dimensões.

d) Seja $\mathbf{u}$ o vector-linha $\mathbf{u} = (0, 1, \alpha, 1)$. Determine α por forma a que $\mathbf{u}$ pertença ao espaço das linhas de A.

II - APENAS EXAME

Seja V o subconjunto do espaço linear $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes 2×2 reais formado pelas matrizes de traço nulo.

a) Mostre que V é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Determine **justificadamente** uma base de V e diga qual a dimensão de V.

c) Considere a função $T : V \to V$ definida por $T(A) = M.A - A.M$, onde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que T é uma transformação linear e construa a sua representação matricial relativamente à base escolhida em (b).

d) Determine os valores próprios de T, bem como os subespaços próprios correspondentes. A transformação T é diagonalizável?

III -EXAME E TESTE

Considere, no espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios reais da variável real de grau ≤ 2, a transformação $T_{\alpha,\beta} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, dependente dos parâmetros reais α, β, definida por

$$T_{\alpha,\beta}(p) = p'' + \alpha p' + \beta p.$$

a) Mostre que $T_{\alpha,\beta}$ é uma transformação linear e determine a matriz A que a representa na base ordenada $\mathcal{B} = \{1,\, t,\, t^2\}$.

b) Determine, justificadamente, os valores de α e β para os quais $T_{\alpha,\beta}$ é invertível.

c) Determine, em função de α e β, os valores e vectores próprios de T, bem como as multiplicidades algébrica e geométrica dos valores próprios. Existem valores de α e β para os quais T seja diagonalizável? Justifique.

d) Para $\beta = 2$ e $\alpha = 1$, determine a forma canónica de Jordan J de A, bem como uma matriz S tal que $J = S^{-1}AS$.

IV - EXAME E TESTE

Dados dois vectores u e v de $\mathbb{R}^3$, considere a função real definida por $f(u, v) = u^T Gv$, onde

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que f define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

b) Seja S o subespaço gerado por $(2, 2, 1)^T$. Determine o seu complemento ortogonal $S^\perp$ relativamente a este produto interno.

c) Determine, pelo processo de Gram-Schmidt, bases ortonormadas para S e $S^\perp$ (relativamente a este produto interno).

d) Determine a distância (para este produto interno) do ponto $\mathbf{a} = (2, 0, 0)^T$ a S.

V - TESTE: APENAS PARTE (a)

Seja $A_{n\times n}$ uma matriz complexa.

a) Defina o conjunto do plano complexo $\mathcal{G}_r$ como a união dos n círculos[1] no plano complexo

$$\mid z - a_{ii} \mid \leq \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \mid a_{ij} \mid , i = 1, \ldots n.$$

Mostre que cada valor próprio de A pertence a um destes círculos, e portanto que o espectro de A está contido em $\mathcal{G}_r$. (Sug.: dado um vector próprio $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, existe uma componente x_i tal que $\mid x_i \mid \geq \mid x_k \mid,\ k = 1, \ldots n$).

b) **(APENAS EXAME)** Analogamente, definindo o conjunto $\mathcal{G}_c$ como a união dos n círculos

$$\mid z - a_{ii} \mid \leq \sum_{i=1,\, i\neq j}^{n} \mid a_{ij} \mid , j = 1, \ldots n,$$

mostre que cada valor próprio de A pertence a um destes círculos, e portanto que o espectro de A está contido em $\mathcal{G}_r$ (sug.: considere A^T e utilize (a)).

c) **(APENAS EXAME)** Pode mostrar-se que, se a união $\mathcal{U}$ de k círculos de Gerschgorin é disjunta dos outros $n - k$ círculos, então $\mathcal{U}$ contém exactamente k valores próprios (incluindo multiplicidades). O que lhe permitem estes factos afirmar sobre o espectro e a diagonalizabilidade de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}?$$

[1] chamados *círculos de Gerschgorin*.