Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LMAC, LEFT,LCI,LEBM

17 de Novembro de 2001 Duração: 1h 30m

I (6 val.)

Considere a matriz real A e o vector coluna $\mathbf{b}$ dependente do parâmetro real β dados por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

a) Discuta a natureza do sistema $A.\mathbf{x} = \mathbf{b}$, construindo a sua solução geral sempre que seja possível. Nesses casos identifique claramente uma solução particular do sistema não -homogéneo e a solução geral do sistema homogéneo.

b) Determine o núcleo de A (sug.: baseie-se na alínea anterior). Forneça uma base para $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ e indique qual a sua dimensão. Diga, justificando, qual a dimensão do espaço das colunas de A e forneça uma sua base.

II (6 val.)

Considere, no espaço linear real $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes 2×2, $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, onde $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Construa uma base de $L(S)$, espaço gerado por S, e indique a respectiva dimensão.

b) Mostre que o conjunto $W = \{M \in L(S) : m_{12} = 0\}$ forma um subespaço de $L(S)$ e determine uma base para W. Determine as coordenadas do vector $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ nessa base.

III (5 val.)

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Calcule, através de determinantes, os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz $A - \lambda I$ é singular. Para cada um desses valores determine uma base e a dimensão de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$.

IV (3 val.)

Duas matrizes quadradas $n \times n$, A e B, dizem-se *semelhantes* se existir uma matriz invertível S tal que $B = S^{-1}AS$.

Dadas A e B, será sempre verdade que AB e BA são semelhantes? Esta afirmação altera-se no caso de uma das matrizes A ou B ser invertível?