Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LMAC, LEFT, LCI, LEBM

17 de Novembro de 2001 Duração: 1h 30m

I (6 val.)

Considere a matriz dependente do parâmetro real α

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & \alpha \end{bmatrix}.$$

a) Discuta a natureza do sistema $A_\alpha.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em função de $\alpha \in \mathbb{R}$ e de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

b) Para $\alpha = 3$, determine o núcleo de A, $\mathcal{N}(\mathcal{A})$, forneça uma sua base e indique qual a sua dimensão. Diga, justificando, qual a dimensão do espaço das colunas de A e forneça uma sua base.

II (6 val.)

Considere, no espaço linear $C^0(\mathbb{R})$ das funções reais contínuas de variável real, o subconjunto $S = \{f_1, f_2, f_3\}$, onde $f_1(x) = \operatorname{sen} x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = e^x$.

a) Construa uma base de $L(S)$ e determine a sua dimensão.

b) Mostre que o conjunto $W = \{f \in L(S) : f(x) = f(x + 2\pi)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ forma um subespaço de $L(S)$ e determine uma base para W. Determine as coordenadas do vector $f(x) = \cos(x + \alpha)$ nessa base (sug.: recorde a fórmula para o coseno da soma).

III (5 val.)

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Calcule, através de determinantes, os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz $A - \lambda I$ é singular. Para cada um desses valores determine uma base e a dimensão de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$.

IV (3 val.)

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz $n \times n$ sobre o corpo dos complexos. Mostre que existe um vector $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq \mathbf{0}$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $Av = \lambda v$.

Sugestão : Dado um vector $v_0 \neq \mathbf{0}$, estude a independência linear do conjunto $\{v_0, Av_0, A^2v_0, \ldots, A^nv_0\}$. Recorra ao Teorema Fundamental da Álgebra.