Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2^{o} TESTE / 1^{o} EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

LMAC, LEFT, LEBM

10 de Janeiro de 2003 Duração: 1h 30 (teste) / 3h (exame)

TESTE: APENAS III, IV e V(a),(b) — EXAME: TODOS OS GRUPOS

I - APENAS EXAME

Considere a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Determine a solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{b} = [1\ 2\ 5\ 4]^T$.

b) Determine a dimensão e uma base para $\mathcal{N}(A)$ (sug.: utilize a alínea anterior).

c) Determine justificadamente bases para os espaços das linhas e das colunas de A, bem como as respectivas dimensões.

d) Verifique que $\lambda = 4$ é valor próprio de A. Determine, *sem calcular o polinómio carcterístico* mas justificando adequadamente, todos os valores próprios de A e respectivas multiplicidades algébrica e geométrica. A matriz é diagonalizável?

II - APENAS EXAME

Seja $\mathcal{S}_2$ o subconjunto do espaço linear $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes 2×2 reais formado pelas matrizes simétricas (isto é, verificando $A = A^T$).

a) Mostre que $\mathcal{S}_2$ é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, determine justificadamente uma sua base e indique a dimensão de $\mathcal{S}_2$.

b) Considere a função $F : \mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_2$ definida por $F(A) = M.A + A.M^T$, onde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que F é uma transformação linear e construa a sua representação matricial relativamente à base escolhida em (b).

c) Determine os valores próprios de F. É possível fazer alguma afirmação sobre diagonalizabilidade de F? Porquê?

III -EXAME E TESTE

Considere, no espaço linear $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dos polinómios reais da variável real t de grau ≤ 2, a transformação $T_{\alpha,\beta} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, dependente dos parâmetros reais α, β, definida por

$$T_{\alpha,\beta}(p)(t) = \alpha p(t) + \beta(1+t)\, p'(t).$$

a) Mostre que $T_{\alpha,\beta}$ é uma transformação linear e determine a sua representação matricial na base ordenada $\mathcal{B} = \{1,\, t,\, t^2\}$.

b) Determine, justificadamente, os valores próprios de $T_{\alpha,\beta}$. Para que valores de α, β é $T_{\alpha,\beta}$ diagonalizável? Porquê?

c) Determine os espaços próprios de $T_{1,1}$ (isto é, de $T_{\alpha,\beta}$ para $\alpha = \beta = 1$). **Note:** pretendem-se os subespaços de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, não a sua expressão em coordenadas.

d) Para que valores de α e β é $T_{\alpha,\beta}$ um isomorfismo sobre a sua imagem? Justifique convenientemente.

IV - EXAME E TESTE

Considere, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual, a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja representação relativamente à base canónica é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Determine os valores próprios de T, as suas multiplicidades algébrica e geométrica, e os correspondentes espaços próprios.

b) A matriz A é diagonalizável? Em caso afirmativo, indique uma matriz diagonal Λ e a correspondente matriz S tais que $\Lambda = S^{-1}AS$. Caso contrário, indique a sua forma canónica de Jordan J e a correspondente matriz S tais que $J = S^{-1}AS$.

c) Seja E_{-1} o espaço próprio associado ao valor próprio -1. Determine uma base ortonormada para $E_{-1}^{\perp}$, complemento ortogonal de E_{-1}, e determine a distância de $\mathbf{x} = [1\ 1\ 1]^T$ a E_{-1}.

V - TESTE: APENAS PARTES (a), (b)

Seja V um espaço vectorial complexo de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dado um operador linear $T : V \to V$, chama-se *operador adjunto de* T, e designa-se por T^*, o operador linear tal que

$$\forall\ u,\, v \in V\ \ \langle Tu, v \rangle = \langle u, T^* v \rangle.$$

Um operador linear T diz-se *normal* se comuta com o seu adjunto, isto é, $TT^* = T^*T$.

a) Mostre que, se T é normal, então $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*)$.

b) Mostre que, se T é normal, então todo o vector próprio generalizado de T é vector próprio de T (sug.: mostre que $\mathcal{N}(T^k) = \mathcal{N}(T)$ para todo o $k \in \mathbb{N}$). Conclua que T é diagonalizável.

c) **(APENAS EXAME)** Mostre que, se T é normal, então vectores próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais.

d) **(APENAS EXAME)** Mostre que T possui uma base de vectores próprios ortogonais *se e só se* T é normal.