Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º TESTE/1º EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: Aeroespacial, Ciências Informáticas e Electricidade

1ª Época – 10/I/03, 13h

Duração: 1h 40mn (teste)/ 3h (exame)

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

I – (6 valores) Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^5$ definido por

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 = 0 \wedge x_2 - x_5 = 0 \right\}.$$

(a) Justifique que V é um espaço linear, determine a sua dimensão e indique uma base.

Seja agora $T_\alpha : V \to V$ a transformação linear definida por

$$T_\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2, x_2 - x_1, x_3 + x_4, x_3 + \alpha x_4, x_2 - x_1).$$

(b) Determine a representação matricial de T_α em relação à base de V da alínea anterior, e calcule $T_\alpha(V)$, a imagem de V por intermédio de T_α.

(c) Diga, justificando, para que valores de α é que T_α é invertível e, para esses casos, calcule a representação matricial de T_α^{-1} em relação à base da alínea (a).

(d) Resolva (em V!) a equação $T_\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-1, 1, 2, 1, 1)$.

II – (6 valores) Seja S o subespaço linear de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \wedge y = 0 \right\},$$

$S^\perp$ o complemento ortogonal de S em relação ao produto interno usual, e $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projecção ortogonal sobre $S^\perp$.

(a) Indique uma base ortonormada para $S^\perp$.

(b) Determine os valores e vectores próprios de P e diga, justificando, se existe alguma base de $\mathbb{R}^3$ em relação à qual a representação matricial de P seja uma matriz diagonal. Em caso afirmativo, indique uma base nessas condições.

(c) Determine o ponto de $S^\perp$ mais próximo do ponto $Q = (1, 1, 1)$, e calcule a distância de Q a $S^\perp$.

(d) Seja agora **r** a recta que passa na origem e no ponto Q. Determine os pontos de **r** que estão à distância 1 de $S^\perp$.

VIRE, SE FAZ FAVOR

III – Seja $\mathcal{P}_3$ o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a três, e $\mathcal{S}$ o subespaço definido por $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{P}_3 : p''(0) = 0\}$. Considere a transformação linear $S_\beta : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ definida por

$$S_\beta(p)(x) = (x^2 - 1)p''(x) - xp'(x) + \beta p(x),$$

e designe por R_β a sua extensão a $\mathcal{P}_3$ definida pela mesma expressão.
(2.5 valores)

(a) Determine a solução geral da equação $S_\beta(p)(x) = x^3$.

(b) Sendo A_β uma representação matricial de S_β em relação a uma dada base de $\mathcal{S}$, calcule o determinante de A_β e diga, justificando, para que valores de β é que S_β é invertível.

(2.5 valores)

(c) Determine o núcleo de R_0, indicando a sua dimensão e uma base.

(d) Justifique que existe uma base de $\mathcal{S}$ em relação à qual a representação matricial de S_β é uma matriz diagonal, mas que não existe uma base de $\mathcal{P}_3$ para a qual a representação matricial de R_β seja uma matriz diagonal.

IV – Seja A uma matriz real $n \times n$, e $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função definida por $F(u, v) = u^t Av$.
(1.5 valores)

(a) Prove que qualquer que seja a matriz B real $n \times n$, não singular, se $A = B^t B$, então a função F define um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

(b) Será que se pode obter a mesma conclusão que na alínea anterior se as hipóteses forem que $A = B^2$, onde B é agora uma matriz $n \times n$, real e não singular, tal que $A^t = A$?

(1.5 valores)

(c) Assuma agora que A é uma matriz simétrica tal que a função F define um produto interno em $\mathbb{R}^n$. Prove que então existe uma matriz B real $n \times n$ tal que $A = B^t B$. (Sugestão: utilize o facto de que se A é real simétrica, então existe uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores próprios de A)

(d) Prove qualquer matriz B nas condições da alínea anterior é não singular.