Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2^{o} TESTE / 2^{o} EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

LMAC, LEFT, LEBM

25 de Janeiro de 2003 Duração: 1h 40 (teste) / 3h (exame)

TESTE: APENAS III, IV e V(a),(b) — EXAME: TODOS OS GRUPOS

I - APENAS EXAME

Considere a matriz A_α, dependente do parâmetro real α, dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

a) Discuta o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{b} = [1\ 0\ 2]^T$, em função de α, e determine a sua solução geral sempre que ele seja possível.

b) Determine a inversa de A_0 (isto é, de A_α para $\alpha = 0$).

c) Para $\alpha = -1$, determine a dimensão e uma base para os espaços $\mathcal{N}(A_{-1})$, $\text{col}(A_{-1})$. Sem realizar mais cálculos, o que pode afirmar sobre o determinante e os valores próprios de A_{-1}? Justifique.

d) Determine todos os valores próprios de A_{-1} e respectivas multiplicidades algébrica e geométrica. A matriz A_{-1} é diagonalizável? Justifique cuidadosamente.

II - APENAS EXAME

Considere, no espaço linear $C^\infty(\mathbb{R})$ das funções reais de variável real indefinidamente diferenciáveis, o conjunto $S = \{e^{-x},\, e^x \cos x,\, e^x \operatorname{sen} x\}$.

a) Mostre que S é um conjunto linearmente independente. Qual a dimensão de $L(S)$?

b) Mostre que o operador derivação $D : L(S) \to L(S)$ é linear. Tomando S para base de $L(S)$, construa a representação matricial de D nessa base.

c) Determine os valores próprios, reais e complexos, de $D : L(S) \to L(S)$ e respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.

d) Construa justificadamente todos os subespaços invariantes não-triviais de $L(S)$ por acção de D. **Note:** pretendem-se os subespaços de $L(S)$, não a sua expressão em coordenadas.

III -EXAME E TESTE

Considere, no espaço linear $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dos polinómios reais da variável real t de grau ≤ 2, a transformação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, definida pelas condições

$$T(1+t) = -1-t,\ T(t^2) = -t,\ T(t+t^2) = -1+t^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

a) Construa a representação matricial A de T na base ordenada $\mathcal{B} = \{1,\, t,\, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

b) Determine, justificadamente, os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.

c) A matriz A é diagonalizável? Em caso afirmativo, indique uma matriz diagonal Λ e a correspondente matriz S tais que $\Lambda = S^{-1}AS$. Caso contrário, indique a sua forma canónica de Jordan J e a correspondente matriz S tais que $J = S^{-1}AS$.

IV - EXAME E TESTE

Dados dois vectores u e v expressos na base canónica de $\mathbb{R}^3$, considere a função real definida por $f(u,v) = u^T G v$, onde

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que f define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

b) Seja $S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$. Determine, pelo processo de Gram-Schmidt, bases ortonormadas para S e $S^\perp$ *relativamente ao produto interno definido por* f.

c) Determine qual o ponto $\mathbf{x_0} \in S$ mais próximo de $\mathbf{x} = (0,2,2)^T$, bem como a distância de $\mathbf{x}$ a S *relativamente ao produto interno definido por* f.

d) Verifique que todos os valores próprios de G são positivos. Explique **sucintamente** porque essa é uma condição necessária para que f defina um produto interno.

V - TESTE: APENAS PARTES (a), (b)

Seja V um espaço vectorial complexo de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dada uma transformação linear $T : V \to V$, chama-se *adjunta de* T, e designa-se por T^*, a transformação linear tal que

$$\forall\ u,\, v \in V\ \ \langle Tu, v \rangle = \langle u, T^* v \rangle.$$

Uma transformação linear T diz-se *hermitiana* (ou *auto-adjunta*) se é igual à sua adjunta, isto é, $T = T^*$.

a) Mostre que os valores próprios de uma transformação hermitiana são reais.

b) Mostre que, se T é hermitiana, então vectores próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais.

c) **(APENAS EXAME)** Mostre que T é hermitiana *se e só se* em qualquer base ortonormada a sua representação matricial A verifica $A = A^*$, onde A^* designa a matriz transconjugada de A.

d) **(APENAS EXAME)** Encontre condições necessárias e suficientes para que o produto de duas transformações hermitianas seja hermitiana.