Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: Aeroespacial, Ciências Informáticas e Electricidade

25/I/03, 9h, Duração: 3h

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

I – (6 valores) Considere a seguinte matriz

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 0 & \alpha & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Determine, em função do parâmetro α, o núcleo e o espaço das colunas da matriz A_α. Escreva bases para esses espaços, e indique as suas dimensões.

(b) Calcule o determinante da matriz A_α e indique, justificando, os valores de α para os quais a matriz é invertível.

(c) Para os valores de α para os quais A_α é invertível, determine a entrada $(4, 2)$ da inversa.

(d) Seja $b \in \mathbb{R}^4$ um vector para o qual o sistema $A_\alpha u = b$ admite a solução $u = (1, -1, 0, 0)$. Determine, discutindo em função de α, a solução geral desse sistema.

II – (6 valores) Seja

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e $F_\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $F_\beta(u, v) = u^t(B + \beta I)v$, onde I designa a matriz identidade 3×3.

(a) Determine os valores e vectores próprios da matriz B.

(b) A matriz B é diagonalizável? Justifique. Em caso afirmativo, indique uma base em relação à qual a sua representação matricial seja uma matriz diagonal Λ, indicando a matriz de mudança de base e a matriz Λ correspondente.

(c) Diga, justificando, para que valores de β é que a função F_β define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

(d) Determine, em relação ao produto interno definido por F_0, o ponto do eixo dos xx mais próximo do ponto $Q = (1, 1, 1)$, e a distância de Q a esse eixo.

VIRE, SE FAZ FAVOR

III – (5 valores) Sejam $\mathcal{M}_3$ o espaço das matrizes reais 3×3, e $\mathcal{A}_3$ o subconjunto de $\mathcal{M}_3$ definido por $\mathcal{A}_3 = \{A \in \mathcal{M}_3 : A = -A^t\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{A}_3$ é um subespaço linear de $\mathcal{M}_3$, e indique a sua dimensão e uma base.

Seja agora $T : \mathcal{M}_3 \to \mathcal{M}_3$ a transformação linear definida por $T(X) = MX - XM$, onde M é uma matriz de $\mathcal{A}_3$.

(b) Justifique que $T(\mathcal{A}_3) \subset \mathcal{A}_3$ e que $\dim(T(\mathcal{A}_3)) < \dim(\mathcal{A}_3)$, qualquer que seja a matriz $M \in \mathcal{A}_3$.

(c) Sendo R a restrição de T a $\mathcal{A}_3$, e para o caso de

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

determine os valores próprios de R.

(d) Resolva a equação $R(X) = L$, onde

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

IV – (3 valores) Seja V um espaço euclidiano (real ou complexo) de dimensão n, com produto interno p. Seja ainda $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $H : V \to V$ a transformação linear definida por

$$H(v) = \sum_{j=1}^{n} p(v, v_j) v_j.$$

(a) Justifique que H é invertível.

(b) Mostre que a matriz G de entradas

$$g_{ij} = p(v_i, v_j), \quad i, j = 1, \ldots, n$$

é invertível.

(c) Mostre que $p(H(v), v) > 0$ para $v \neq 0$.

(d) Prove que os valores próprios de H são números reais positivos.