Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LMAC, LEFT, LEBM

16 de Novembro de 2002 Duração: 1h 30m

I (6 val.)

Considere a matriz real A e o vector coluna $\mathbf{b}$ dependente do parâmetro real β dados por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

a) Discuta a natureza do sistema $A.\mathbf{x} = \mathbf{b}$, construindo a sua solução geral sempre que seja possível. Nesses casos identifique claramente uma solução particular do sistema não -homogéneo e a solução geral do sistema homogéneo.

b) Determine o núcleo de A (sug.: baseie-se na alínea anterior). Forneça uma base para $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ e indique qual a sua dimensão. Diga, justificando, qual a dimensão do espaço das colunas de A e forneça uma sua base.

II (6 val.)

Considere, no espaço linear $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, o subconjunto $S = \{t+1,\ t^2+2t+1,\ t^3+3t^2+t+1,\ t^3+4t^2+6t+3\}$.

a) Construa uma base de $L(S)$, espaço gerado por S, e indique a respectiva dimensão.

b) Determine se $p(t) = 1+t+t^2+t^3 \in L(S)$. Em caso afirmativo, determine as coordenadas de p na base construída na alínea anterior.

III (5 val.)

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Calcule, através de determinantes, os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz $A - \lambda I$ é singular. Para cada um desses valores determine uma base e a dimensão de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$.

IV (3 val.)

Uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ diz-se um *quadrado mágico de ordem* n se a soma dos elementos ao longo de qualquer linha, qualquer coluna e de ambas as diagonais (principal e secundária) for constante. Designe, no que se segue, o conjunto dos quadrados mágicos de ordem n por Q_n.

a) Mostre que Q_n, munido das operações usuais de soma e multiplicação por escalar, forma um espaço vectorial real.

b) Determine uma base e a dimensão de Q_2.