Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 5/Dez/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA AVANÇADA 5

(1) Um *matriz de transição regular* é uma matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{bmatrix}$$

em que todas as entradas são positivas e em que a soma das entradas em cada coluna é 1. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$$

é uma matriz de transição regular.

(a) Mostre que se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é uma matriz de transição regular 2×2 então $\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de A. Quais são os correspondentes valores próprios? Qual é a relação do módulo desses valores próprios com 1?

(b) Seja v um vector próprio v de uma matriz de transição regular $n \times n$ A, em que as entradas de v são todas positivas. Mostre que o valor próprio associado é menor ou igual a 1. (Sugestão: Considere a maior entrada de v. O que é que pode dizer sobre a correspondente entrada de Av?)

(c) Se na alínea anterior se omitir a condição das entradas de v serem todas positivas, ainda é verdade que o valor próprio associado é menor ou igual a 1?

(d) Mostre que 1 é sempre um valor próprio de uma matriz de transição regular com multiplicidade geométrica 1. Mostre que qualquer outro valor próprio complexo, $\lambda \neq 1$, de uma matriz de transição regular tem que ter módulo menor do que 1.

(e) Mostre que se v um vector de $\mathbb{R}^n$ cujas entradas somam 1, e se A é uma matriz de transição regular $n \times n$, então as entradas de Av também somam 1.

(f) Se se tomar uma matriz de transição regular $n \times n$ A, e se se calcular (usando, por exemplo, uma decomposição de Jordan) potências A^2, A^3, $\ldots$, A^{100}, $\ldots$, o que é que se deverá observar? Assuma que há uma base própria (complexa) para A.

(continua)

(2) Um *matriz de Markov* é uma matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{bmatrix}$$

em que todas as entradas são não negativas e em que a soma das entradas em cada coluna é 1.

(a) Mostre que 1 é valor próprio de qualquer matriz de Markov.

Sugestão: O vector $(1, 1, \ldots, 1)^t$ é vector próprio da matriz transposta A^t.

Considera-se então um vector próprio v para o valor próprio 1 e com soma das entradas de v igual a 1 como representando uma distribuição de probabilidade de equilíbrio estável para a *cadeia de Markov*.

(b) Verifique que A^n é também uma matriz de Markov.

(c) Verifique que as entradas de todas as matrizes A^n formam um conjunto limitado.

(d) Porque é que A não tem qualquer valor próprio maior do que 1?

(e) Verifique que as multiplicidades algébricas e geométricas do valor próprio 1 são ambas 1.

Sugestão: Como transformação linear, A leva o octante n-dimensional positivo estritamente para si próprio. Conclua que um vector próprio tem que estar nesse octante. Mostre que tem que haver um vector próprio com valor próprio 1 no fecho do octante positivo.

(f) Prove que qualquer matriz A com entradas estritamente positivas tem um valor próprio máximo com multiplicidade 1. Este resultado chama-se *teorema de Frobenius*.