Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 10/Out/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA 1

SOLUÇÕES SUMÁRIAS DOS EXERCÍCIOS ÍMPARES

Sistemas de Equações Lineares

(1) Por substituição de variáveis e/ou adição de equações. encontra-se a solução

$$\begin{cases} x &= \frac{27}{8} \\ y &= \frac{9}{2} \\ z &= \frac{45}{8} \ . \end{cases}$$

(3) Um polinómio $p(x) = ax^2 + bx + c$ passa nos pontos indicados se e só se os seus coeficientes a, b e c verificarem o sistema (substituindo x por 1, 2 e 3, respectivamente):

$$\begin{cases} a + b + c &= 1 \\ 4a + 2b + c &= 0 \\ 9a + 3b + c &= -1 \end{cases}$$

para o qual se encontra a única solução $a = 0$, $b = -1$ e $c = 2$. Logo, o polinómio é $p(x) = -x + 2$.

(5) Representando por x o número de irmãs e por y o número de irmãos (rapazes) na família, o Pedro terá x irmãs e $y - 1$ irmãos, enquanto que a Rosa terá y irmãos e $x - 1$ irmãs. Nestes termos, é dito que

$$\begin{cases} x &= 2(y-1) \\ y &= x - 1 \ . \end{cases}$$

Ora a solução deste sistema é dada por $x = 4$ e $y = 3$, pelo que o número total de crianças é 7.

Método de Eliminação de Gauss-Jordan

(7) (a) $\begin{cases} x &= 1 \\ y &= \frac{1}{2} \\ z &= -1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -1 \\ x_4 &= 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{cases}$

(7)

(e) Sistema impossível. (f) $\begin{cases} x_1 &= -\frac{2}{3}x_3 \\ x_2 &= \frac{5}{3}x_3 \\ x_3 &\in \mathbb{R} \end{cases}$ (g) $\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x_1 = -x_2 + x_4 + \frac{1}{4} \\ x_3 = \frac{1}{4} \\ x_2, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$ (i) $\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_4 \\ x_5 = -x_6 \\ x_2, x_4, x_6 \in \mathbb{R} \end{cases}$ (j) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = 1 + \frac{1}{3}x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(9)

Aplicando o método de eliminação de Gauss ao sistema dado, pode-se obter, por exemplo, o sistema equivalente

$$\begin{cases} x & +y & +z & = b_1 \\ & -2y & -2z & = b_2 - b_1 \\ & & 0 & = b_3 - 2b_1 - b_2 \ . \end{cases}$$

Portanto, o sistema é possível se e só se $b_3 - 2b_1 - b_2 = 0$.
Quando $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, a solução geral é

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ z \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

Adição e Produto de Matrizes

(11)

(a) Pelo método de indução, demonstra-se que $\begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \pi^n & 0 \\ 0 & \pi^n \end{bmatrix}$.

De facto, o caso $n = 1$ é imediato, e assumindo a fórmula para um inteiro n deduz-se, pelo produto de matrizes, a fórmula para um inteiro $n + 1$:

$$\begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi^n & 0 \\ 0 & \pi^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi^{n+1} & 0 \\ 0 & \pi^{n+1} \end{bmatrix}$$

(b) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Como $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathrm{Id}$, tem-se $A^4 = (A^2)^2 = (-\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Id}$, pelo que $A^{4k} = (A^4)^k = (\mathrm{Id})^k = \mathrm{Id}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Assim, deduz-se:

$A^{4k} = \mathrm{Id}$, $A^{4k+1} = A^{4k}A = A$,
$A^{4k+2} = A^{4k+1}A = -\mathrm{Id}$, $A^{4k+3} = A^{4k+2}A = -A$ onde $k \in \mathbb{N}_0$.

Comentário: A matriz A é uma "raiz quadrada" de $-\mathrm{Id}$, pois $A^2 = -\mathrm{Id}$.

(c) Por indução, verifica-se que $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{bmatrix}$.

(13) Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Se $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, então $AB = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Para que $AB = BA$, tem que ser $b = c = 0$.
Se $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, então $AC = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $CA = \begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (usando já $b = c = 0$).
Para que $AC = CA$, tem que ser $d = a$. Logo, $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = a\mathrm{Id}$ com $a \in \mathbb{R}$.
Comentário: O mesmo raciocícnio generaliza-se a matrizes $n \times n$. Uma tal matriz A comuta com qualquer outra da mesma dimensão (i.e. $AB = BA$, $\forall B$) se e só se A for um múltiplo escalar da matriz identidade: $A = k\mathrm{Id}$ para algum $k \in \mathbb{R}$.

Inversão de Matrizes

(15) Quando alguma das entradas a_{ii} de uma matriz diagonal é zero, a forma escalonada da matriz não pode ser a identidade (porque lhe faltam entradas não-nulas na diagonal), pelo que a matriz não pode ser invertível. Na verdade, uma matriz diagonal é invertível se e só se todas as suas entradas na diagonal principal forem não-nulas, isto é, sse $a_{ii} \neq 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Nesse caso, pode-se verificar que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}.$$

(17) Se A e B são matrizes $n \times n$ invertíveis então:

(a) A matriz AB é sempre invertível com matriz inversa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Verificação: Pela associatividade do produto de matrizes,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\mathrm{Id}A^{-1} = AA^{-1} = \mathrm{Id}$$

e analogamente

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\mathrm{Id}B = B^{-1}B = \mathrm{Id}\ .$$

(b) $A + B$ pode não ser invertível. Por exemplo, se $B = -A$ então $A + B = 0$. Mas também pode ser invertível. Por exemplo, quando $B = A$, a inversa de $A + B = 2A$ é $\frac{1}{2}A^{-1}$.

(c) A matriz AB^{-1} é sempre invertível com inversa $(AB^{-1})^{-1} = BA^{-1}$.

(d) $A^pB^{-q}A^{-q}B^q$ é sempre invertível e $(A^pB^{-q}A^{-q}B^q)^{-1} = B^{-q}A^qB^qA^{-p}$.

(19) Como se verificou (exercício (12)(e)), se $AB = \mathrm{Id}$ então $B = A^{-1}$ e $BA = \mathrm{Id}$.
Assim, $BA^2 - A = (BA)A - A = \mathrm{Id}A - A = A - A = 0$.