Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 13/Out/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA 2 – INVERSÃO E TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Matrizes: Inversão e Formas Escalonadas

(1) Sem fazer cálculos, inverta as seguintes matrizes ou determine se não são invertíveis.

$$A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & 1+\pi & 0 \\ 0 & 0 & 1-\pi \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Sugestão: Para as três últimas, observe primeiro o efeito da multiplicação destas matrizes por outras.) Calcule $(D^2E)^{-1}D$.

(2) Uma matriz obtida a partir de uma matriz identidade alterando apenas o valor de uma entrada fora da diagonal principal chama-se uma *matriz elementar*. Por exemplo, as matrizes C, D e E do exercício (1) são elementares. Mostre que uma matriz elementar é sempre invertível.

(3) (a) Para que escolhas da constante k é que a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & k \end{bmatrix}$ é invertível?

(b) Para que escolhas da constante k é que todas as entradas da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & k \end{bmatrix}^{-1}$ são números inteiros?

(4) Considere as matrizes: $F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Calcule, quando existirem, as inversas de F, G, H, F^2, GH, HG, FG, $G+H$, $F+G$ e $F+H$.

(5) Diz-se que duas matrizes $m \times n$ em forma escalonada são *do mesmo tipo* se contêm o mesmo número de líderes nas mesmas posições. Por exemplo, as seguintes matrizes são do mesmo tipo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Quantos tipos de matrizes 2×2 em forma escalonada é que há?
(b) Quantos tipos de matrizes 3×2 em forma escalonada é que há?
(c) Quantos tipos de matrizes 2×3 em forma escalonada é que há?

(6) Seja v_P uma solução (particular) do sistema linear $Av = b$. Justifique que:
 (a) se v_H é uma solução do sistema homogéneo associado $Av = 0$, então $v_P + v_H$ é solução do sistema $Av = b$;
 (b) se v'_P é outra solução do sistema $Av = b$, então $v'_P - v_P$ é solução do sistema homogéneo associado $Av = 0$.

Para o caso particular em que A é uma matriz 2×2 e em que o conjunto das soluções do sistema homogéneo $Av = 0$ forma uma recta, descreva o conjunto das soluções do sistema $Av = b$ a partir dessa recta e de uma dada solução particular v_P.

Invertibilidade à Direita e à Esquerda

(7) Uma matriz A diz-se *invertível à direita* se existir uma matriz B tal que AB é uma matriz identidade. Nesse caso, B chama-se uma *inversa à direita* de A. De modo análogo definem-se matrizes *invertíveis à esquerda* e *inversas à esquerda*. Para cada uma das seguintes matrizes, exiba inversas à direita e à esquerda sempre que existam.

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 1/2 & -3/2 & -1 & 3/2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (k) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

(8) Para cada uma das matrizes do exercício (7), determine para que matrizes-coluna b é que o sistema $Av = b$:
 (a) tem uma e uma só solução;
 (b) tem mais do que uma solução;
 (c) é impossível.

(9) Seja J a matriz da alínea (j) do exercício (7).
 (a) Determine todas as soluções de $Jv = b$ onde

$$b = \pi \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \sqrt{2} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

 (b) Determine todas as matrizes X tais que $J^t X = 0$ (matriz identicamente nula). Note que a matriz J^t também foi estudada no exercício (7).

Transposição

(10) Dada uma matrix $A = (a_{ij})$ de dimensões $m \times n$, chama-se *matriz transposta* de A à matriz $B = (b_{ij})$ de dimensões $n \times m$ tal que $b_{ij} = a_{ji}$. Denota-se a matriz transposta de A por A^t. Mostre que:
(a) $(A^t)^t = A$,
(b) $(AB)^t = B^t A^t$ e
(c) se A for invertível ($m = n$), então a transposta também o é e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

(11) Calcule A^t, AA^t e A^tA para as seguintes matrizes.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Transformações Lineares

(12) Para cada uma das transformações seguintes, decida quais são lineares. No caso das lineares, ache a matriz correspondente.
(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (y, z, x)$.
(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.
(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (y, z)$.
(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y^2 \\ z^3 \end{bmatrix}$.
(e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (1, y)$.
(f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y + 3z \\ 5x - 7z \\ \pi y + 4z \end{bmatrix}$.
(g) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $T(x, y, z) = (2x - y + 3z, 5x - 7z, \pi y + 4z, \sin z)$.

(13) Interprete geometricamente as seguintes transformações lineares.

(a) $T(v) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} v$ (b) $T(v) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v$ (c) $T(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} v$

(14) (a) Mostre que, se uma transformação linear T é invertível, então a sua transformação inversa T^{-1} também é linear.
(b) Descreva a invertibilidade de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto Av$, em termos do comportamento dos sistemas lineares $Av = b$.
(c) Explique porque é que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ só pode ser bijectiva quando $m = n$.

(15) O *produto exterior* (ou *produto vectorial*) de dois vectores em $\mathbb{R}^3$ é definido por

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}.$$

Seja u um vector arbitrário de $\mathbb{R}^3$ fixo. Será que a transformação de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ dada por $T(v) = u \times v$ é linear? Se sim, ache a matriz correspondente.

(16) Ao representar um objecto tridimensional graficamente num plano (papel, quadro, ecrã,...), há que transformar três coordenadas espaciais (x_1, x_2, x_3) em duas coordenadas no plano (y_1, y_2). A maneira mais simples consiste em usar uma transformação linear, por exemplo, a transformação dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Use esta transformação para representar o cubo unitário de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$. Inclua no esboço as imagens dos três eixos coordenados de $\mathbb{R}^3$.

(b) Quais os pontos (x_1, x_2, x_3) que são transformados na origem $(0,0)$? Justifique.

Núcleo e Imagem

(17) Dê um exemplo de uma transformação linear cujo núcleo seja formado pelos múltiplos do vector $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^3$.

(18) Para cada uma das matrizes do exercício (10) da ficha 1, calcule o núcleo e a imagem (da transformação linear correspondente).

(19) Seja B a forma escalonada de uma matriz A.

(a) Será que os núcleos de A e de B são necessariamente iguais?

(b) Será que as imagens de A e de B são necessariamente iguais?

(20) Mostre que o núcleo de uma transformação linear T é fechado para a adição e para o produto por escalares, i.e.,

$$\forall u, v \in \operatorname{Ker} T, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{tem-se} \quad u + v \in \operatorname{Ker} T \quad \text{e} \quad \lambda v \in \operatorname{Ker} T\ .$$