**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

Última actualização: 28/Out/2003

# ÁLGEBRA LINEAR A

# FICHA 3

# SOLUÇÕES SUMÁRIAS DOS EXERCÍCIOS ÍMPARES

## Espaços e Subespaços

(1) Os conjuntos que formam espaços vectoriais são:
(a), (c), (h), (i), (j), (m), (p), (q), (r), (s), (u), (w), (x), (y) e (z).

(3)

| subespaços de | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^2$ | $\mathbb{R}^3$ |
|---|---|---|---|
| $\dim = 0$ | $\{0\}$ | $\{0\}$ | $\{0\}$ |
| $\dim = 1$ | $\mathbb{R}$ | rectas que passam na origem | rectas que passam na origem |
| $\dim = 2$ | – | $\mathbb{R}^2$ | planos que passam na origem |
| $\dim = 3$ | – | – | $\mathbb{R}^3$ |

## Expansão Linear e Independência Linear

(5) Apenas o conjunto (b) gera $\mathbb{R}^3$.

(7) Uma função $f(x)$ pertence a $\mathcal{L}(\sin x, \cos x)$ sse é combinação linear de $\sin x$ e $\cos x$, i.e., sse existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = a \sin x + b \cos x, \forall\, x \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $\cos(2x) \in \mathcal{L}(\sin x, \cos x)$. Então, substituindo $x = 0$ e $x = \pi$ na condição acima, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} b &= 1 \\ -b &= 1 \end{cases}$$

(uma vez que $\sin 0 = \sin \pi = 0$, $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$ e $\cos \pi = -1$). Como este sistema não tem solução, conclui-se que $\cos(2x) \notin \mathcal{L}(\sin x, \cos x)$.
Quanto à segunda questão, tem-se $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \in \mathcal{L}(\sin^2 x, \cos^2 x)$.

## Bases e Dimensão

(9)

(a) Pode-se completar o conjunto $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ com o vector $(0,1,0)$ e obtém-se a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Escolhendo sucessivamente vectores independentes, obtém-se por exemplo a base $\{(2,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(c) Considere-se a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ cujas linhas são os vectores dados. A forma escalonada de $A$ é a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$, portanto o vector $(0,0,1)$ não pertence ao espaço das linhas de $B$. Como as linhas de uma matriz geram o mesmo espaço que as linhas da sua forma escalonada, então $(0,0,1) \notin \mathcal{L}((2,3,1),(1,4,2))$, ou seja, os vectores $(2,3,1)$, $(1,4,2)$ e $(0,0,1)$ são linearmente independentes, logo formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

**Comentário:** A solução deste exercício não é única.

(11)

Os vectores $(1,0,0,2)$, $(0,1,0,3)$, $(0,0,1,4)$ e $(2,3,4,k)$ formam uma base de $\mathbb{R}^4$ sse a matriz cujas colunas são os vectores dados

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & k \end{bmatrix}$$

é invertível (cf. Exercício (18)). Pelo método de Gauss, obtém-se a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & k-29 \end{bmatrix}.$$

Como $A$ é invertível sse $k \neq 29$, conclui-se que sempre que $k \neq 29$ os vectores formam uma base de $\mathbb{R}^4$.

## Bases para o Núcleo e a Imagem

(13)

Resumidamente:
– Uma base para a imagem de uma matriz $A$ é dada pelas colunas de $A$ que correspondem às colunas com líderes na forma escalonada de $A$.
– Uma base para o núcleo de uma matriz $A$ é obtida das relações dadas pelas colunas sem líderes na forma escalonada de $A$.
– A característica é a dimensão da imagem e a nulidade é a dimensão do núcleo.
Usando estes factos e definições, obtém-se:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ tem característica 2 e nulidade 1.
$\{(1,2),(0,-1)\}$ é uma base para $\mathcal{I}(A)$, $\{(-1,-2,0)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tem característica 2 e nulidade 0.
$\{(3,4,1),(1,1,0)\}$ é uma base para $\mathcal{I}(A)$, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ (não tem base).

(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ tem característica 2 e nulidade 1.
$\{(3,1),(4,1)\}$ é uma base para $\mathcal{I}(A)$, $\{(-1,1,-1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$.

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ tem característica 1 e nulidade 0.
$\{2\}$ é uma base para $\mathcal{I}(A)$, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$.

(e) $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ tem característica 1 e nulidade 0.
$\{(3,4,1)\}$ é uma base para $\mathcal{I}(A)$, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$.

(f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ tem característica 1 e nulidade 1.
$\{(1,1)\}$ é uma base para $\mathcal{I}(A)$, $\{(1,-1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$.

(g) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem característica 1 e nulidade 1.
$\{(1,0)\}$ é uma base para $\mathcal{I}(A)$, $\{(1,0)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$.

(h) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ tem característica 1 e nulidade 3.
$\{1\}$ é uma base para $\mathcal{I}(A)$, $\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(-1,1,0,0)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$.

(i) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tem característica 1 e nulidade 0.
$\{(0,1,0,0)\}$ é uma base para $\mathcal{I}(A)$, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$.

(15) Na resolução deste exercício usa-se os seguintes factos:
– $A$ é invertível à direita sse $A$ é sobrejectiva, e
– $A$ é invertível à esquerda sse $A$ é injectiva.

(a) Invertível à direita mas não à esquerda.
(b) Invertível à esquerda mas não à direita.
(c) Invertível à direita mas não à esquerda.
(d) Invertível à esquerda e à direita.
(e) Invertível à esquerda mas não à direita.
(f) Não é invertível à esquerda nem à direita.
(g) Não é invertível à esquerda nem à direita.
(h) Invertível à direita mas não à esquerda.
(i) Invertível à esquerda mas não à direita.

(17) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Então o núcleo $\mathcal{N}(A)$ e a imagem $\mathcal{I}(A)$ são ambos iguais ao subespaço gerado pelo vector $(1, 1)$. (Há muitas mais matrizes 2×2 satisfazendo $\mathcal{N}(A) = \mathcal{I}(A)$.)
Se $A$ é uma matriz 3×3, então $\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{I}(A) = 3$ é ímpar. Portanto, a nulidade e a característica de $A$ nunca são iguais. Como $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{I}(A)$ são subespaços de dimensões diferentes, têm que ser diferentes.

(19) As proposições (a), (b), (c) são verdadeiras.
(d) é falsa: considere-se, por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.
(e) é verdadeira: $A$ é invertível à direita sse $A$ é sobrejectiva sse car$(A)$ é igual ao número de linhas.
(f) é verdadeira: $A$ é invertível à esquerda sse $A$ é injectiva sse car$(A)$ é igual ao número de colunas.