Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 15/Nov/2003

# ÁLGEBRA LINEAR A

## FICHA 6 – DETERMINANTES E VALORES PRÓPRIOS

### Propriedades dos Determinantes

(1) Calcule os determinantes das seguintes matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

(2) Considere uma matriz $4 \times 4$ $A$ com linhas $w_1$, $w_2$, $w_3$ e $w_4$ e com $\det A = 8$. Ache os determinantes das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_2 & - \\ - & -5w_3 & - \\ - & w_4 & - \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} - & w_4 & - \\ - & w_3 & - \\ - & w_2 & - \\ - & w_1 & - \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_2 + 5w_4 & - \\ - & w_3 & - \\ - & w_4 & - \end{bmatrix}$

(3) Será que o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1000 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 1000 & 8 \\ 1000 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1000 \\ 1 & 2 & 1000 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

é positivo ou negativo? Não o calcule.

(4) Mostre que duas matrizes semelhantes têm o mesmo determinante.
Conclua que o determinante de uma transformação linear $T : V \to V$ está bem definido como sendo o determinante de uma matriz $A$ que representa $T$ em relação a uma qualquer base de $V$.

(5) Considere dois números reais distintos, $a$ e $b$. Defina a função

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & x \\ a^2 & b^2 & x^2 \end{bmatrix} .$$

(a) Mostre que $f(x)$ é uma função quadrática, i.e., é dada por um polinómio de grau $2$ em $x$.
(b) Explique porque é que $f(a) = f(b) = 0$. Conclua que $f(x) = k(x-a)(x-b)$ para uma certa constante $k$. Calcule $k$.
(c) Para que valores de $x$ é que esta matriz é invertível?

## Fórmula de Laplace e Regra de Cramer

(6) Use a fórmula de Laplace para calcular os determinantes das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 30 & 94 & 46 & 14 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 47 & 23 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

(7) Para que escolhas de $\alpha$ é que a seguinte matriz é invertível?

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 1 & -\sin\alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin\alpha & 3 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

(8) Use a regra de Cramer para resolver os sistemas:

(a) $\begin{cases} 3x + 7y = 1 \\ 4x + 11y = 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ -6x + 7y = 0 \end{cases}$

(9) Considere uma matriz quadrada $A$ com entradas inteiras e tal que $\det A = 1$. Será que as entradas de $A^{-1}$ são necessariamente números inteiros? Explique.

## Área e Volume

(10) Considere os vectores $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Ache a área do paralelogramo definido por $v_1$ e $v_2$.

(b) Ache a área do triângulo definido por $v_1$ e $v_2$, i.e., o triângulo com vértices $(0,0)$, $(3,7)$ e $(8,2)$.

(11) Considere matrizes $4 \times 4$ cujas entradas são todas $1$, $-1$ ou $0$.
Qual é o máximo valor do determinante de uma matriz deste tipo?
Dê um exemplo de uma matriz cujo determinante tenha esse valor máximo.

(12) Considere uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $R$ um paralelogramo em $\mathbb{R}^2$ definido por vectores linearmente independentes $v_1$ e $v_2$. A imagem de $R$ por $T$,

$$T(R) = \{T(v) : v \in R\}$$

é o paralelogramo definido pelos vectores $T(v_1)$ e $T(v_2)$. Seja $A$ a matriz que representa $T$ em relação à base canónica. Mostre que

$$\frac{\text{área de } T(R)}{\text{área de } R} = |\det A| \ .$$

## Valores Próprios e Vectores Próprios

(13) Calcule os valores próprios e os vectores próprios das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(14) Determine todas as matrizes $2 \times 2$ para as quais:

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um vector próprio com valor próprio $5$, e

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um vector próprio.

(15) Mostre que duas matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios.
Sugestão: Se $v$ é um vector próprio de $S^{-1}AS$, então $Sv$ é um vector próprio de $A$.

(16) Suponha que $A$ é uma matriz $n \times n$ invertível e que $v$ é um vector próprio de $A$ associado ao valor próprio $\lambda$.
(a) Será que $v$ é um vector próprio de $A^3$? Se sim, qual é o valor próprio associado?
(b) E será de $A^{-1}$? Se sim, qual é o valor próprio associado?
(c) E será de $A + 2\mathrm{Id}$? Se sim, qual é o valor próprio associado?

(17) Argumentando geometricamente, ache os vectores próprios e os valores próprios das seguintes transformações lineares.
(a) Reflexão relativamente à recta $y = -x$ em $\mathbb{R}^2$.
(b) Rotação por um ângulo $\pi$ em $\mathbb{R}^2$.
(c) Reflexão num plano $P$ em $\mathbb{R}^3$.
(d) Projecção ortogonal numa recta $L$ em $\mathbb{R}^3$.

## Polinómios Característicos

(18) Escreva os polinómios característicos das seguintes matrizes e use-os para calcular os valores próprios.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(19) Considere uma matriz quadrada arbitrária $A$.
Qual é a relação entre o polinómio característico de $A$ e da matriz transposta $A^t$?
O que é que a sua resposta permite concluir sobre os valores próprios de $A$ e de $A^t$?

(20) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ onde $a$, $b$ e $c$ são constantes reais não nulas.
Para que escolhas de $a$, $b$ e $c$ é que a matriz $A$ tem dois valores próprios distintos?