Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 20/Nov/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA 6

SOLUÇÕES SUMÁRIAS DOS EXERCÍCIOS ÍMPARES

Propriedades dos Determinantes

(1) Por definição do determinante de uma matriz 3×3, tem-se $\det A = 7$.

A única contribuição não nula para o determinante de B é a do produto das entradas da anti-diagonal, pelo que $\det B = 1$.

Uma vez que todas as colunas da matriz C são iguais, tem-se $\det C = 0$.

Olhando para as entradas não nulas da matriz D, nota-se que a única contribuição não nula para o somatório que dá o determinante (definição do determinante) é a que é dada pelo produto das seguintes entradas:

- 5 da 4ª linha e 5ª coluna,
- 2 da 2ª linha e 4ª coluna,
- 2 da 1ª linha e 3ª coluna,
- 9 da 3ª linha e 2ª coluna,
- 3 da 5ª linha e 1ª coluna,

ou seja, pelo produto

$$\underbrace{a_{13}}_{2}\underbrace{a_{24}}_{2}\underbrace{a_{32}}_{9}\underbrace{a_{45}}_{5}\underbrace{a_{51}}_{3} .$$

De facto, esta é a única maneira de escolher exactamente uma entrada de cada linha e de cada coluna evitando todas as entradas nulas. Como a correspondente permutação $\sigma = (3, 4, 2, 5, 1)$ é par, vem

$$\det D = +2 \times 2 \times 9 \times 5 \times 3 = 540 .$$

Comentário: Alternativamente, para se calcular $\det(D)$ poder-se-ia aplicar a fórmula de Laplace (ao longo da 1ª coluna ou da 4ª linha).

(3) Na definição de determinante

$$\det A = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{1\sigma(5)} \ ,$$

onde σ percorre todas as permutações de cinco elementos, a permutação que colhe todas as entradas iguais a 1000 é $\sigma = (2,4,1,5,3)$. Como esta permutação é par, então

$$\det A = 1000^5 + \sum_{\sigma \neq (2,4,1,5,3)} (-1)^{\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{1\sigma(5)} \ .$$

Qualquer outra permutação apanha no máximo três entradas iguais a 1000. Portanto

$$\det A = 1000^5 + \sum_{\sigma \neq (2,4,1,5,3)} (-1)^{\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{1\sigma(5)} \geq 1000^5 - 119 \cdot 9^2 \cdot 1000^3 > 0$$

porque as entradas diferentes de 1000 são inferiores ou iguais a 9, e há 119 permutações de cinco elementos diferente de $(2,4,1,5,3)$. Logo, $\det A$ é positivo.

(5)

(a) Por definição de determinante, $f(x)$ é dada pela soma com sinais dos produtos de três entradas de linhas e colunas diferentes. Portanto, é um polinómio em x onde o termo de maior grau é um múltiplo de x^2.

(b) Quando $x = a$ (ou $x = b$, respectivamente), a terceira coluna da matriz é igual à primeira (ou à segunda, respectivamente), portanto o determinante é zero. Sendo f uma função quadrática com duas raízes a e b, então é da forma

$$f(x) = k(x-a)(x-b) \ .$$

Para calcular o valor de k basta calcular f num ponto particular, por exemplo, em $x = 0$:

$$f(0) = ab^2 - a^2 b = k(0-a)(0-b) = abk \implies k = b - a \ .$$

(c) A matriz é invertível sse o seu determinante é diferente de zero, ou seja, sse $f(x) \neq 0$, ou seja, sse $x \neq a$ e $x \neq b$.

Fórmula de Laplace e Regra de Cramer

(7) Aplicando a fórmula de Laplace ao longo da segunda linha de A, obtém-se

$$\det A = 2\det\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix} = 2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 2 \neq 0$$

para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. Portanto, a matriz A é sempre invertível.

(9) A entrada ij da matriz dos cofactores cof A é dada por $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$. Assim, se as entradas de A são números inteiros, as entradas de cof A também são. Como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{cof}\, A)^t\ ,$$

se $\det(A) = 1$ (ou se $\det A = -1$), então as entradas de A^{-1} também são garantidamente números inteiros.

Área e Volume

(11) O determinante de uma matriz, se for positivo, é o volume do paralelepípedo definido pelas suas linhas (ou colunas). O paralelepípedo definido pelos vectores v_1, v_2, v_3, $v_4 \in \mathbb{R}^4$ com componentes 1, -1 ou 0 tem volume máximo quando os vectores são ortogonais entre si e têm norma máxima que, neste caso, é 2.
Considere-se a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

As linhas de A são ortogonais e cada uma tem norma 2. Portanto, o determinante de qualquer matriz 4×4 com entradas 1, -1 ou 0 é menor ou igual ao determinante da matriz A.
Para calcular $\det A$ pode-se aplicar o método de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = B$$

Como não se multiplicou nenhuma linha por escalares, nem se permutou linhas, $\det A = \det B = 16$. (Tratando-se de uma matriz triangular superior, o determinante de B é o produto das entradas na diagonal principal.)

Comentário: Geometricamente podíamos deduzir que $\det A = 16$ uma vez que se trata do volume de um cubo (pois as suas arestas são vectores ortogonais com o mesmo comprimento). A área de um quadrado de lado ℓ é ℓ^2. O volume de um cubo em $\mathbb{R}^3$ de lado ℓ é ℓ^3. Por analogia, o volume de um cubo em $\mathbb{R}^4$ de lado ℓ é ℓ^4. Neste caso, o cubo tem lado 2, portanto $\det A = 2^4 = 16$, que foi o resultado obtido pelo método de Gauss.

Valores Próprios e Vectores Próprios

(13)

(a) Seja A a matriz dada. O vector $v \neq 0$ é vector próprio de A sse $Av = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $v = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$,

$$Av = \lambda v \iff \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \lambda x_4 \\ \lambda x_5 \end{bmatrix}$$

$$\iff x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \lambda x_1 = \lambda x_2 = \lambda x_3 = \lambda x_4 = \lambda x_5$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 \end{cases}$$

Conclusão: Os valores próprios da matriz são 0 e 1. Os vectores próprios associados a $\lambda = 0$ são os vectores não nulos do núcleo da matriz $\mathcal{N}(A) = \mathcal{L}((-1, 0, 0, 0, 1), (-1, 0, 0, 1, 0), (-1, 0, 1, 0, 0), (-1, 1, 0, 0, 0))$. Os vectores próprios associados a $\lambda = 5$ são os múltiplos escalares não nulos do vector $(1, 1, 1, 1, 1)$.

(b) Seja A a matriz dada na alínea (a) e B a matriz dada nesta alínea. Então $B = A + 3\text{Id}$. O polinómio característico de B é

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda\text{Id}) = \det(A - (\lambda - 3)\text{Id}) = p_A(\lambda - 3) \ .$$

Logo, λ é valor próprio de B sse $\lambda - 3$ é valor próprio de A. Portanto os valores próprios de B são 3 e 8. Os vectores próprios de B associados a $\lambda = 3$ são os vectores próprios de A associados ao valor próprio 0 de A porque $Bv = 3v$ sse $Av = 0$. Os vectores próprios de B associados a $\lambda = 5$ são os vectores próprios de A associados ao valor próprio 5 de A porque $Bv = 8v$ sse $Av = 5v$.

(15)

O vector $v \neq 0$ é vector próprio associado ao valor próprio λ de $S^{-1}AS$ sse $S^{-1}ASv = \lambda v$ see $ASv = \lambda Sv$ sse Sv é vector próprio de A associado ao valor próprio λ. Daqui conclui-se que as matrizes $S^{-1}AS$ e A têm os mesmos valores próprios.

(17)

(a) A reflexão de qualquer vector sobre a recta $x = -y$ coincide com ele próprio, logo os vectores $(x, -x)$, com $x \neq 0$, são os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 1$. A reflexão de um vector perpendicular à recta $x = -y$ é o seu simétrico, logo os vectores (x, x), com $x \neq 0$, são os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = -1$.

(b) Rodar um vector de um ângulo π em $\mathbb{R}^2$ é o mesmo que multiplicá-lo pelo escalar -1. Logo todos os vectores em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ são vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = -1$.

(c) É semelhante à alinea (a). A reflexão de qualquer vector sobre o plano P coincide com ele próprio, logo os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 1$ são os vectores em $P \setminus \{0\}$. A reflexão de um vector perpendicular ao plano P é o seu simétrico, logo os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = -1$ são os vectores em $P^\perp \setminus \{0\}$.

(d) Um vector na recta L é projectado em si mesmo, logo os vectores em $L \setminus \{0\}$ são vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 1$. Um vector ortogonal à recta L é projectado no vector nulo, logo os vectores em $L^\perp \setminus \{0\}$ são vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 0$.

Polinómios Característicos

(19)

Os valores próprios de A^t são as raízes do polinómios característico:

$$\begin{aligned} p_{A^t}(\lambda) &= \det(A^t - \lambda \mathrm{Id}) \\ &= \det(A^t - (\lambda \mathrm{Id})^t) \qquad (\text{porque } (\lambda \mathrm{Id})^t = \lambda \mathrm{Id}) \\ &= \det(A - \lambda \mathrm{Id})^t \\ &= \det(A - \lambda \mathrm{Id}) \qquad (\text{porque } \det B^t = \det B) \\ &= p_A(\lambda) \ . \end{aligned}$$

Ou seja, A e A^t têm o mesmo polinómio característico, logo têm os mesmos valores próprios.