Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 3/Dez/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA 7

SOLUÇÕES SUMÁRIAS DOS EXERCÍCIOS ÍMPARES

Cálculo de Valores Próprios

(1) Os polinómios característicos são: $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$, $p_B(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$, $p_C(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 3)$, $p_D(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda+1)^2(\lambda-1)$ e $p_E(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda+1)$. Portanto os valores prórios de A são 3 e 1, os de B são $\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$, os de C são 0 e -3, os de D são -1 e 1, e os de E são -1, 1 e 0.
Comentário: Sendo A uma matriz triangular, os seus valores próprios são as entradas da diagonal.

(3) O polinómio característico de A é

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ k & 3 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + k\ .$$

Portanto A tem três valores próprios distintos sse p_A tem três zeros distintos sse $g(\lambda) := \lambda^3 - 3\lambda$ atinge o valor k em três pontos λ distintos.
A função g atinge os máximos e mínimos locais quando a sua derivada é zero:

$$g'(\lambda) = 3\lambda^2 - 3 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pm 1\ .$$

Observe-se o gráfico de g em baixo. Quando k vale $g(1) = -2$ (o mínimo local de g) ou $g(-1) = 2$ (o máximo local), há apenas duas soluções de $g(\lambda) = k$, i.e., o polinómio p_A tem apenas dois zeros distintos. Quando $k < -2$ ou $k > 2$, há apenas uma solução de $g(\lambda) = k$, i.e., o polinómio p_A tem apenas um zero. Quando $-2 < k < 2$, há três soluções de $g(\lambda) = k$, i.e., o polinómio p_A tem três zeros. Logo, A tem três valores próprios distintos sse $k \in]-2, 2[$.

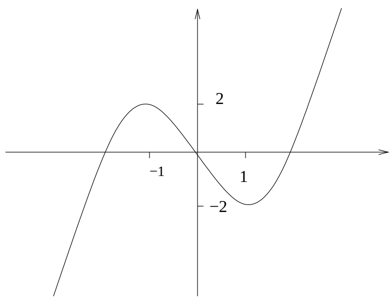

Gráfico da função $g(\lambda) = \lambda^3 - \lambda$.

Cálculo de Vectores Próprios

(5) Como A é uma matriz triangular superior, os valores próprios são as entradas da diagonal principal: 1 é valor próprio com multiplicidade algébrica 2 e 2 é valor próprio com multiplicidade algébrica 1.
A multiplicidade geométrica é sempre menor ou igual à multiplicidade algébrica (e sempre positiva), portanto o valor próprio 2 tem multiplicidade geométrica 1, independentemente das constantes a, b e c.
Para calcular a multiplicidade geométrica de 1, determina-se o espaço próprio $E_1 = \mathcal{N}(A - \mathrm{Id})$:

$$A - \mathrm{Id} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ & & c \\ & & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ & & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} = B$$

Se $a = 0$, a matriz $A - \mathrm{Id}$ tem apenas uma coluna não nula, logo o seu núcleo tem $\dim E_1 = 1$. Se $a \neq 0$, a matriz $A - \mathrm{Id}$ tem duas colunas linearmente independentes, logo $\dim E_1 = 1$. Assim, o valor próprio 1 tem multiplicidade geométrica 2 quando $a = 0$ e tem multiplicidade geométrica 1 quando $a \neq 0$. Há uma base própria de A sse $a = 0$.

Diagonalização

(7) Seja $v_1, \ldots, v_n$ uma base própria. Então

(*) $$(A - \lambda_i \mathrm{Id})v_j = (\lambda_j - \lambda_i)v_j$$

onde v_j é vector próprio associado ao valor próprio λ_{j_i}. Em particular, tem-se $(A - \lambda_i \mathrm{Id})v_j = 0$ se $\lambda_j = \lambda_i$.
Seja v um vector qualquer em $\mathbb{R}^n$. Como $v_1, \ldots, v_n$ formam uma base, existem escalares $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que

(**) $$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \ .$$

Multiplicando pela matriz $(A - \lambda_1 \mathrm{Id})(A - \lambda_2 \mathrm{Id}) \cdots (A - \lambda_m \mathrm{Id})$ ambos os membros de (**) e usando a igualdade (*), obtém-se

$$(A - \lambda_1 \mathrm{Id})(A - \lambda_2 \mathrm{Id}) \cdots (A - \lambda_m \mathrm{Id})v = 0$$

porque todos os v_j são vectores próprios de A e $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são todos os valores próprios de A. Finalmente, como v é um vector arbitrário, conclui-se que

$$(A - \lambda_1 \mathrm{Id})(A - \lambda_2 \mathrm{Id}) \cdots (A - \lambda_m \mathrm{Id}) = 0 \ .$$

Matrizes Semelhantes

(9) Por definição, a matriz A é semelhante a B se existe uma matriz invertível S tal que $B = S^{-1}AS$.

(a) Tome-se $S = \mathrm{Id}$.

(b) Se A é semelhante a B, então $B = S^{-1}AS$ para alguma matriz S, mas $B = S^{-1}AS \iff A = SBS^{-1}$, logo B é semelhante a A.

(c) Se A é semelhante a B e B a C, então existem matrizes invertíveis S e T tais que $B = S^{-1}AS$ e $C = T^{-1}BT$. Logo

$$C = T^{-1}BT = T^{-1}S^{-1}AST = (ST)^{-1}A(ST) \ ,$$

ou seja, A é semelhante a C.

Sejam A e B matrizes semelhantes a M. Pela simetria, M é semelhante a B. Pela transitividade, como A é semelhante a M e M é semelhante a B, então A é semelhante a B.

(11)

(a)
$$\begin{aligned} v \in \mathrm{Ker}\ B &\iff Bv = 0 \\ &\iff S^{-1}ASV = 0 \\ &\iff A(Sv) = 0 \\ &\iff Sv \in \mathrm{Ker}\ A \end{aligned}$$

(b) Na alínea (a) mostrou-se que a restrição de $T : \mathrm{Ker}\ B \to \mathrm{Ker}\ A$ está bem definida, i.e., $T(\mathrm{Ker}\ B) \subseteq \mathrm{Ker}\ A$. A injectividade e a sobrejectividade de $T : \mathrm{Ker}\ B \to \mathrm{Ker}\ A$ decorrem da invertibilidade de S e dos cálculos na alínea (a).

(c) As matrizes A e B têm a mesma nulidade porque existe uma bijecção entre $\mathrm{Ker}\ A$ e $\mathrm{Ker}\ B$. Portanto A e B também têm a mesma característica porque

$$\dim \mathrm{Ker}\ A + \mathrm{car} A = \dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Ker}\ B + \mathrm{car} B \ .$$

(13) Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não são semelhantes, porque a matriz nula é a única matriz semelhante à matriz nula.

Números Complexos

(15) O polinómio característico de A é $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}) = \lambda^2 - 4\lambda + 13$. Portanto os valores próprios de A são

$$p_A(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 2 + 3i \text{ ou } \lambda = 2 - 3i \ .$$

O polinómio característico de B é

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) \ . \end{aligned}$$

Portanto os valores próprios de B são

$$p_B(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \lambda = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \ .$$

O polinómio característico de C é

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) &= \det(C - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) \ . \end{aligned}$$

Portanto os valores próprios de C são

$$p_C(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = i \text{ ou } \lambda = -i \ .$$

Forma Canónica de Jordan

(17) Os valores próprios de A são

$$\det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff (3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \iff \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = 2 \ .$$

Como são dois valores diferentes, admitem dois vectores próprios linearmente independentes, pelo que a matriz é diagonalizável e pode-se tomar

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \ .$$

Os vectores próprios para $\lambda = 2$ são os vectores $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ que verificam

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = 0 \ .$$

Uma base destes vectores próprios é constituída por

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ .$$

Os vectores próprios para $\lambda = 3$ são os que verificam

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff b = -2a \ .$$

Uma base destes vectores próprios é constituída por

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \ .$$

Portanto, uma matriz de mudança de base é

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

e

$$A = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

Comentário: Para calcular os vectores próprios associados a λ poder-se-ia simplesmente ter calculado o núcleo de $A - \lambda\mathrm{Id}$.

Os valores próprios de B são

$$\det\begin{bmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2}-\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff (\tfrac{3}{2}-\lambda)(\tfrac{5}{2}-\lambda)+\tfrac{1}{4}=0$$
$$\iff \lambda^2-4\lambda+4=0$$
$$\iff (\lambda-2)^2=0$$
$$\iff \lambda=2\ .$$

Como não pode haver dois vectores próprios linearmente independentes (nesse caso o espaço próprio seria todo o $\mathbb{R}^2$ e portanto B teria de ser igual a $2\mathrm{Id}$ o que não é o caso), conclui-se que

$$J=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\ .$$

Um vector próprio associado a $\lambda=2$ é uma solução da equação

$$(B-2\mathrm{Id})v=0$$
$$\iff \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\iff a=b\ .$$

(17) Uma base dos vectores próprios é constituída por

$$v=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\ .$$

Um vector próprio generalizado associado ao vector próprio v é uma solução w da equação

$$(B-2\mathrm{Id})w=v$$
$$\iff \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\iff -\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b=1\ .$$

Pode-se tomar, por exemplo, $a=-1$ e $b=1$, isto é

$$w=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\ .$$

Conclui-se que uma matriz de mudança de base S tal que $B=SJS^{-1}$ é

$$S=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$B=SJS^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\ .$$

Os valores próprios de C são

$$\det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff (3-\lambda)(2-\lambda)+2=0$$
$$\iff \lambda^2 - 5\lambda + 8 = 0$$
$$\iff \lambda = \tfrac{5\pm\sqrt{-7}}{2}$$

portanto a matriz é diagonalizável e tem-se

$$J = \begin{bmatrix} \frac{5+i\sqrt{7}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}.$$

Os vectores próprios para $\lambda = \frac{5+i\sqrt{7}}{2}$ são os que verificam

$$\begin{bmatrix} \frac{1-i\sqrt{7}}{2} & 1 \\ -2 & -\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff b = \left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right) a\ ,$$

(17) portanto, uma base dos vectores próprios para $\lambda = \frac{5+i\sqrt{7}}{2}$ é constituída por

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}.$$

Como C é uma matriz real, os vectores próprios para $\lambda = \frac{5-\sqrt{7}i}{2}$ são os conjugados dos vectores próprios para $\lambda = \frac{5+\sqrt{7}i}{2}$. Logo, uma base dos vectores próprios é constituída por

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}.$$

A matriz de mudança de base é

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}$$

e

$$C = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5+i\sqrt{7}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-i+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} & \frac{-i}{\sqrt{7}} \\ \frac{i+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} & \frac{i}{\sqrt{7}} \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios de D são as soluções de

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -\lambda^3 - \lambda = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda(\lambda^2+1) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = \pm i \ .
\end{aligned}$$

Conclui-se que a matriz é diagonalizável e pode-se tomar

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} .$$

Claramente,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é um vector próprio de $\lambda = 0$. Os vectores próprios de $\lambda = i$ são os que verificam

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Longleftrightarrow \quad &\begin{cases} -ia = 0 \\ -ib - c = 0 \\ b - ic = 0 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow \quad &a = 0 \text{ e } c = -ib \ .
\end{aligned} \tag{17}$$

Uma base dos vectores próprios para $\lambda = i$ é dada por

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} .$$

Como D é uma matriz real os vectores próprios associados a $-i$ são os conjugados dos vectores próprios de i. Uma base é então dada por

$$v_3 = \overline{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Consequentemente, uma matriz de mudança de base é dada por

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{bmatrix}$$

e

$$D = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} .$$

Os valores próprios de E são as soluções de

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff -\lambda^3 + \lambda - \lambda = 0 \iff \lambda = 0 \ .$$

Os vectores próprios de $\lambda = 0$ são os que satisfazem a equação

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} b = 0 \\ -a - c = 0 \ . \end{cases}$$

A dimensão do espaço próprio de 0 é 1 portanto há um único bloco de Jordan. Assim,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

Uma base dos vectores próprios associados a $\lambda = 0$ é

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ .$$

A segunda coluna, w, da matriz S obtém-se resolvendo a equação

(17) $$(E - 0\mathrm{Id})w = v \iff \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ .$$

Pode-se tomar

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ .$$

A terceira coluna, u, da matriz S obtém-se resolvendo a equação

$$(E - 0\mathrm{Id})u = w \iff \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ .$$

Pode-se tomar

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, uma matriz de mudança de base é dada por

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$E = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

Os valores próprios de F são as soluções de

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -6 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \ ,$$

ou seja $\lambda = 2$ (com multiplicidade algébrica dois) e $\lambda = 1$.
Os vectores próprios associados ao valor próprio 2 são os que verificam

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2a = 2a \\ -b-6c = 2b \\ b+4c = 2c \end{cases} \iff b = -2c \ .$$

Os vectores próprios associados ao valor próprio 1 são os que verificam

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2a = a \\ -b-6c = b \\ b+4c = c \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = -3c \ . \end{cases}$$

(17) Por exemplo,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

são linearmente independentes, formando v_1 e v_2 um base do próprio associado a 2 e v_3 uma base do espaço próprio associado a 1.
Conclui-se que a matriz é diagonalizável e pode-se tomar a forma canónica de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz de mudança de base

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

tais que $F = SJS^{-1}$.

(19)

(a) Como $S^{-1}AS = J$, então $A = SJS^{-1}$. Substituindo A por SJS^{-1} na igualdade

$$e^{At} = \mathrm{Id} + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \cdots$$

e simplificando, obtém-se:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathrm{Id} + At + A^2\tfrac{t^2}{2!} + A^3\tfrac{t^3}{3!} + \cdots \\ &= \mathrm{Id} + SJS^{-1}t + SJ^2S^{-1}\tfrac{t^2}{2!} + SJ^3S^{-1}\tfrac{t^3}{3!} + \cdots \\ &= S(\mathrm{Id} + Jt + J^2\tfrac{t^2}{2!} + J^3\tfrac{t^3}{3!} + \cdots)S^{-1} \\ &= Se^{Jt}S^{-1} \end{aligned}$$

(b) Por indução em n:

- Para $n = 1$ não há nada a demonstrar, uma vez que $J^1 = J$ por definição.
- Suponha-se que $J^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$. Quer-se demonstrar que $J^{n+1} = \begin{bmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{bmatrix}$. Aplicando a definição de potência de uma matriz e seguidamente a hipótese de indução, obtém-se:

$$\begin{aligned} J^{n+1} &= J^nJ && \text{(definição de potência)} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} && \text{(hipótese de indução)} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(19) (c) Usando os resultados do exercício (17), os resultados das alíneas anteriores e um resultado análogo ao da alínea (b) mas para um bloco 3×3, obtém-se:

$$\begin{aligned}
e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 2(e^{2t} - e^{3t}) & e^{2t} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{Bt} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2-t}{2}e^{2t} & \frac{t}{2}e^{2t} \\ \frac{-t}{2}e^{2t} & \frac{2+t}{2}e^{2t} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{Ct} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\frac{5+i\sqrt{7}}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{5-i\sqrt{7}}{2}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-i+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} & \frac{-i}{\sqrt{7}} \\ \frac{i+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} & \frac{i}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{\frac{5}{2}t}\cos\frac{t\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{\sqrt{7}}e^{\frac{5}{2}t}\sin\frac{t\sqrt{7}}{2} & \frac{2}{\sqrt{7}}e^{\frac{5}{2}t}\sin\frac{t\sqrt{7}}{2} \\ \frac{-4}{\sqrt{7}}e^{\frac{5}{2}t}\sin\frac{t\sqrt{7}}{2} & e^{\frac{5}{2}t}\cos\frac{t\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{\sqrt{7}}e^{\frac{5}{2}t}\sin\frac{t\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{Dt} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{Et} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2}+1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ -t & 1 & -t \\ -\frac{t^2}{2} & t & 1-\frac{t^2}{2} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{Ft} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 3e^{t} - 2e^{2t} & 6e^{t} - 6e^{2t} \\ 0 & e^{2t} - e^{t} & 3e^{2t} - 2e^{t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$