Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 23/Out/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 1 – 23 DE OUTUBRO DE 2003 – 16:10-17H

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos. A cotação do problema (4) é igualmente repartida pelas suas alíneas.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 5ª feira, 30 de Outubro, 17h-18h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)	
(2)	
(3)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________

Nome: ____

(1) Determine a solução geral do sistema

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 8 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & & 2x_3 & -2x_4 & = & 6 \end{cases}$$

Resolução: *Pelo método de eliminação de Gauss, usando notação matricial,*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ & & 2 & -2 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 8 \\ & & -1 & & -3 \\ & & 2 & -2 & 6 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 8 \\ & & -1 & & -3 \\ & & & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & 2 \\ & & 1 & & 3 \\ & & & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Portanto, a solução do sistema é (em termos de variáveis)

$$\begin{cases} x_1 = 2 + x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

ou (em notação vectorial)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$\square$

(2) Calcule o núcleo e a imagem da transformação linear

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 , \qquad T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + y + z \\ y + z \end{bmatrix}$$

Resolução: *O núcleo é dado pelo conjunto de soluções do sistema*

$$\begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

pelo que é o conjunto

$$\mathcal{N}(T) = \{\lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\} .$$

Como os sistemas

$$\begin{cases} 3x + y + z = a \\ y + z = b \end{cases}$$

têm solução para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ *(porque há dois pivots para as duas equações), conclui-se que a imagem é*

$$\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^2 .$$

□

(3) Para que escolhas do parâmetro k é que a seguinte matriz é invertível?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & k & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolução: *Pelo método de Gauss,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & k & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & k-4 & 1 \\ & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 1 & 2 \\ & k-4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 1 & 2 \\ & & 9-2k \end{bmatrix}$$

vê-se que a matriz é invertível se e só se $k \neq \frac{9}{2}$ *(para que haja três pivots).* □

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Há sistemas de três equações lineares a três incógnitas com exactamente três soluções.

Verdadeira ☐ Falsa $\boxed{\text{X}}$

Resolução: *Um sistema de equações lineares só pode ter 0, 1 ou infinitas soluções.* □

(b) Há uma matriz A tal que $A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ e $A\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$.

Verdadeira ☐ Falsa $\boxed{\text{X}}$

Resolução: *Se* $A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, *então*

$$A\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = A\left(2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = 2\left(A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \; .$$

□

(c) A matriz $\begin{bmatrix} k+1 & 2 \\ -1 & k-1 \end{bmatrix}$ é invertível para qualquer número real k.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *Uma matriz* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *é invertível se e só se o número* $ad - bc$ *não é zero. Neste caso, o número é* $(k+1)(k-1)+2 = k^2+1$*, que nunca se anula.* $\square$

(d) Se para uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o núcleo está incluído na imagem, então T não é invertível.

Verdadeira [ ] Falsa [X]

Resolução: *Por exemplo, a transformação identidade tem* $\mathcal{N}(\mathrm{Id}) = \{0\} \subset \mathcal{I}(\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^n$. $\square$

(e) Se uma matriz quadrada A satisfaz $A^2 = 0$, então a matriz $\mathrm{Id} + A$ é necessariamente invertível.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *A matriz inversa é* $\mathrm{Id} - A$ *porque:*

$$(\mathrm{Id} + A)(\mathrm{Id} - A) = \mathrm{Id} - A + A - A^2 = \mathrm{Id} \ .$$

$\square$