Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 2 – 2 DE DEZEMBRO DE 2003 – 16:10-17H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação igualmente repartida pelas alíneas de cada problema.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 3ª feira, 16 de Dezembro, 16h-17h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)	
(2)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: ________________

Nome: ____

(1) Forneça bases para o núcleo e para a imagem da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} .$$

(2) Considere a transformação linear no espaço das matrizes reais 2×2

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{M}_{2\times 2} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2\times 2} \\ & X & \mapsto & MX - XM \end{array}$$

que leva uma matriz X para a diferença de produtos $MX - XM$ onde $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Escolha uma base ordenada de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ e determine a matriz que representa T relativamente a essa base.

(3) No espaço $\mathcal{P}_2$ dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a 2, considere os polinómios $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 - x + x^2$ e $p_3(x) = 1 + x + x^2$.

(a) Mostre que p_1, p_2, p_3 formam uma base de $\mathcal{P}_2$.

(b) Construa a matriz S de mudança da base 1, x, x^2 de $\mathcal{P}_2$ para a base p_1, p_2, p_3, e calcule a matriz inversa S^{-1}.

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Para cada subespaço vectorial $V \subset \mathbb{R}^3$ há uma matriz 3×3 A tal que $V = \mathrm{Im}\, A$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(b) Se V e W são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^n$, então a sua união $V \cup W$ também é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(c) Há uma matriz 4×4 A tal que $\mathrm{Im}\ A = \mathrm{Ker}\ A$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(d) Se A é semelhante a B, então há uma e uma só matriz invertível S tal que $S^{-1}AS = B$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(e) Chamando-se *racional* a uma matriz com todas as entradas dadas por números racionais (i.e., da forma p/q com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$), então a matriz inversa de uma matriz racional invertível também é racional.

Verdadeira ☐ Falsa ☐