Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 4/Nov/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 2 – 4 DE NOVEMBRO DE 2003 – 11:10-12H

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação igualmente repartida pelas alíneas de cada problema.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 5ª feira, 13 de Novembro, 17h-18h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)	
(2)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Forneça bases para o núcleo e para o espaço das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} .$$

Resolução: *Aplicando o método de eliminação de Gauss:*

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{matrix} \textit{forma} \\ \textit{escalonada} \\ \textit{de } A \end{matrix}$$

As colunas da forma escalonada de A que contêm líderes são w_1 e w_2, pelo que as correspondentes colunas de A

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \textit{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

formam uma base do espaço das colunas (ou imagem) de A. Como as colunas (sem líderes) w_3 e w_4 fornecem as relações $w_3 = -6w_1 + 3w_2$ e $w_4 = w_2$, respectivamente, conclui-se que os vectores

$$u_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{N} \begin{pmatrix} \textit{forma} \\ \textit{escalonada} \\ \textit{de } A \end{pmatrix} = \mathcal{N}(A)$$

formam uma base do núcleo $\mathcal{N}(A)$. $\square$

(2) Considere a transformação linear

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Determine a matriz que representa T relativamente às bases ordenadas

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^4 .$$

Resolução: *Sejam*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

os elementos da base de $\mathbb{R}^3$ *e*

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ w_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

os elementos da base de $\mathbb{R}^4$*. As imagens de* v_1*,* v_2 *e* v_3 *são*

$$T(v_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2w_2 , \quad T(v_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2w_3 ,$$

$$T(v_3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -w_1 + w_2 + w_3.$$

As coordenadas de $T(v_1)$*,* $T(v_2)$ *e* $T(v_3)$ *na base* w_1*,* w_2*,* w_3*,* w_4 *são, respectivamente,*

$$(0,2,0,0) \ , \ (0,0,2,0) \ , \ (-1,1,1,0)$$

As colunas da matriz A *que representa* T *em relação à base* v_1, v_2, v_3, v_4 *são formadas por estas coordenadas. Logo,*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

□

(3) No espaço dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a 2, considere os elementos $p_1(x) = x - x^2$, $p_2(x) = x^2$ e $p_3(x) = 2x + x^2$.

(a) Determine uma base do subespaço $V = \mathcal{L}(p_1, p_2, p_3)$ gerado por estes três polinómios e indique a dimensão de V.

Resolução: *Na base* 1, x, x^2, *os polinómios* p_1, p_2 *e* p_3 *têm coordenadas* $(0,1,-1)$, $(0,1,0)$ *e* $(0,2,1)$, *respectivamente. Olhando para a forma escalonada da matriz cujas colunas são formadas por estas coordenadas*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

conclui-se que as duas primeiras colunas são l. i. e que a última coluna é combinação linear das outras duas. Logo, os polinómios p_1 *e* p_2 *formam uma base de* V *e, portanto,* $\dim V = 2$. □

(b) Determine uma base para o subespaço $W = \{p \in V : p'(0) = p(0) = 0\}$.

Resolução: *Para que um polinómio* $p = ap_1 + bp_2 \in W$ *(com* $a, b \in \mathbb{R}$*), tem que ser*

$$a\underbrace{p_1(0)}_{0} + b\underbrace{p_2(0)}_{0} = 0 \quad \text{e} \quad a\underbrace{p_1'(1)}_{1} + b\underbrace{p_2'(1)}_{0} = 0 ,$$

ou seja, $a = 0$. *Conclui-se que* $p_2(x) = x^2$ *forma uma base de* W. □

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) O plano definido por $x + y - z = 1$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Verdadeira $\square$ Falsa $\boxed{X}$

Resolução: *O vector zero* $(0, 0, 0)$ *não pertence a este plano (pois* $0 + 0 - 0 \neq 1$*).* $\square$

(b) Existe uma transformação linear injectiva $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sempre múltiplo do vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Verdadeira $\square$ Falsa $\boxed{X}$

Resolução: *Se* T *é injectiva, então* $\mathcal{N}(T) = \{0\}$*, pelo que* $\dim(\mathcal{N}(T)) = 0$*, e* $\dim(\mathcal{I}(T)) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim(\mathcal{N}(T)) = 2$*. Mas, se todos os vectores da imagem fossem múltiplos de um vector fixo, a dimensão da imagem seria no máximo igual a* 1*.* $\square$

(c) O núcleo de duas transformações lineares semelhantes é o mesmo.

Verdadeira ☐ Falsa ☒

Resolução: *Por exemplo, para a matriz de mudança de base* $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$*, cuja inversa é* $S^{-1} = S$*, as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são semelhantes, mas os núcleos $\mathcal{N}(A) = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ *e* $\mathcal{N}(B) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ *são diferentes.* □

(d) A característica de uma matriz quadrada invertível é igual à característica da sua matriz inversa.

Verdadeira ☒ Falsa ☐

Resolução: *Se* A *é invertível, então a sua inversa* A^{-1} *também é invertível (com* $(A^{-1})^{-1} = A$*). Ora para qualquer matriz* $n \times n$ *invertível, o núcleo tem que ser* $\{0\}$ *(pois é injectiva) e a imagem* $\mathbb{R}^n$ *(pois é sobrejectiva), portanto a característica é* n*.* □

(e) Há uma matriz 2×2 com $A^2 \neq 0$ e $A^3 = 0$.

Verdadeira ☐ Falsa ☒

Resolução: *A característica de uma matriz* 2×2 *só pode ser* 0*,* 1 *ou* 2*. Se for* 0*, a matriz é identicamente nula, pelo que seria* $A^2 = 0$*. Se for* 2*, a matriz é invertível, pelo que seria* A^3 *também invertível e logo nunca igual a* 0*. Se for* 1*, tanto o núcleo como a imagem de* A *têm que ser unidimensionais. Neste caso, quando o núcleo coincide com a imagem, tem-se* $A^2 = 0$*; quando o núcleo é diferente da imagem, a imagem de* A^2 *também será diferente do núcleo de* A*, pelo que* $A^3 \neq 0$*.*

□