Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 2 – 4 DE NOVEMBRO DE 2003 – 11:10-12H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação igualmente repartida pelas alíneas de cada problema.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 5ª feira, 13 de Novembro, 17h-18h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)	
(2)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Forneça bases para o núcleo e para o espaço das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} .$$

(2) Considere a transformação linear

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Determine a matriz que representa T relativamente às bases ordenadas

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^4 .$$

(3) No espaço dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a 2, considere os elementos $p_1(x) = x + x^2$, $p_2(x) = 2x^2$ e $p_3(x) = 3x - x^2$.

(a) Determine uma base do subespaço $V = \mathcal{L}(p_1, p_2, p_3)$ gerado por estes três polinómios e indique a dimensão de V.

(b) Determine uma base para o subespaço $W = \{p \in V : p'(0) = p(0) = 0\}$.

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) O plano definido por $2x + y + z = 1$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(b) Existe uma transformação linear injectiva $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sempre múltiplo do vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(c) Há uma matriz invertível $n \times n$ cuja inversa tem característica $n - 1$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(d) O núcleo de duas transformações lineares semelhantes é o mesmo.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(e) Há uma matriz 3×3 com $A^3 \neq 0$ e $A^4 = 0$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐