Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 4/Nov/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 2 – 4 DE NOVEMBRO DE 2003 – 8:10-9H

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação igualmente repartida pelas alíneas de cada problema.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 5ª feira, 13 de Novembro, 17h-18h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)	
(2)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Forneça bases para o núcleo e para o espaço das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} .$$

Resolução: *Aplicando o método de eliminação de Gauss:*

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{matrix} \textit{forma} \\ \textit{escalonada} \\ \textit{de } A \end{matrix}$$

As colunas da forma escalonada de A que contêm líderes são w_1 e w_2, pelo que as correspondentes colunas de A

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \textit{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

formam uma base do espaço das colunas (ou imagem) de A. Como as colunas (sem líderes) w_3 e w_4 fornecem as relações $w_3 = 2w_2 - w_1$ e $w_4 = 2w_2$, respectivamente, conclui-se que os vectores

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker} \left(\begin{matrix} \textit{forma} \\ \textit{escalonada} \\ \textit{de } A \end{matrix} \right) = \mathrm{Ker}\ A$$

formam uma base do núcleo $\mathrm{Ker}\ A$. □

(2) Considere a transformação linear no espaço das matrizes reais 2×2

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{M}_{2\times 2} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2\times 2} \\ & X & \mapsto & X\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

que leva uma matriz X para a matriz produto XM onde $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.
Determine a matriz que representa T relativamente à base ordenada de $\mathcal{M}_{2\times 2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução: *Sejam*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

os elementos da base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$. As suas imagens

$$T(v_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = v_1 + v_2 ,$$

$$T(v_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -v_1 - v_2 ,$$

$$T(v_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = v_3 + v_4 , T(v_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -v_3 - v_4$$

têm coordenadas

$$(1,1,0,0) , (-1,-1,0,0) , (0,0,1,1) , (0,0,-1,-1)$$

respectivamente, na base v_1, v_2, v_3, v_4. As colunas da matriz A que representa T em relação à base v_1, v_2, v_3, v_4 são formadas por estas coordenadas. Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

(3) Em $\mathbb{R}^3$ considere os elementos

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ \text{e} \ v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine uma base do subespaço $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ gerado por estes três vectores e indique a dimensão de V.

Resolução: *Olhando para a forma escalonada da matriz A cujas colunas são v_1, v_2 e v_3,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

conclui-se que as duas primeiras colunas de A formam uma base do espaço das colunas, ou seja, que v_1 e v_2 formam uma base do espaço $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$. Portanto, $\dim V = 2$. □

(b) Determine uma base do subespaço $W = \{v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in V : a + b + c = 0\}$.

Resolução: *Para que um vector*

$$v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = xv_1 + yv_2 = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 0 \\ -x + y \end{bmatrix}$$

pertença ao subespaço W (com $x, y \in \mathbb{R}$) tem que ser

$$(x + 2y) + 0 + (-x + y) = 0 ,$$

ou seja, $y = 0$. Conclui-se que os elementos de W são os múltiplos de v_1, pelo que $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ forma uma base de W.

□

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Se uma matriz $n \times n$ tem um núcleo n-dimensional, então todas as entradas dessa matriz são nulas.

Verdadeira $\boxed{X}$ Falsa $\boxed{}$

Resolução: *Como* $\dim(\mathrm{Ker}\ A) + \dim(\mathrm{Im}\ A) = n$ *e* $\dim(\mathrm{Ker}\ A) = n$, *tem que ser* $\dim(\mathrm{Im}\ A) = 0$, *pelo que* $\mathrm{Im}\ A = \{0\}$, *ou seja, a matriz* A *tem que ser identicamente nula.* $\square$

(b) Existe uma transformação linear sobrejectiva $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Verdadeira $\boxed{}$ Falsa $\boxed{X}$

Resolução: *Se* T *é sobrejectiva então* $\mathrm{Im}\ T = \mathbb{R}^2$, *pelo que* $\dim(\mathrm{Im}\, T) = 2$ *e* $\dim(\mathrm{Ker}\, T) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\mathrm{Im}\, T) = 3-2 = 1$. *Portanto, o núcleo* $\mathrm{Ker}\ T$ *não pode conter dois vectores linearmente independentes (como os dois vectores indicados).* $\square$

(c) Há uma matriz 3×3 com característica 1 tal que $A^2 = 0$.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *Por exemplo,*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

□

(d) Se $A^2 = 0$ para uma matriz 10×10, então a característica de A é no máximo igual a 5.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *O facto de* $A^2 = 0$ *significa que* $\mathrm{Im}\ A \subseteq \mathrm{Ker}\ A$*, pelo que* $\dim(\mathrm{Im}\ A) \leq \dim(\mathrm{Ker}\ A)$*. Como* $\dim(\mathrm{Ker}\ A) + \dim(\mathrm{Im}\ A) = 10$*, é impossível ter-se* $\dim(\mathrm{Im}\ A) \geq 6$*.*
Conclui-se que a característica de A *(igual, por definição, à dimensão da imagem de* A*) é no máximo igual a* 5*.* □

(e) Se A e B são matrizes invertíveis $n \times n$, então AB é semelhante a BA.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *Da igualdade* $B^{-1}(BA)B = (B^{-1}B)AB = AB$*, vê-se que* AB *é semelhante a* BA*, através da matriz de mudança de base* $S = B$*.* □