Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 3/Nov/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 2 PARA PRATICAR – OUTUBRO DE 2003

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Duração: 50 minutos

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação igualmente repartida pelas alíneas de cada problema.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 5ª feira, 13 de Novembro, 17h-18h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)	
(2)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Forneça bases para o núcleo e para o espaço das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Resolução: *Aplicando o método de eliminação de Gauss:*

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \textit{forma} \\ \textit{escalonada} \\ \textit{de } A \end{array}$$

As colunas da forma escalonada de A que contêm líderes são w_1, w_2 e w_4, pelo que as correspondentes colunas de A

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} , \; v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textit{e} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

formam uma base do espaço das colunas (ou imagem) de A. Como a coluna w_3 (sem líder) fornece a relação $w_3 = 2w_1 + \frac{1}{2}w_2$,

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} \, (\textit{forma escalonada de } A) = \operatorname{Ker} A$$

e este vector u forma uma base do núcleo $\operatorname{Ker} A$. □

(2) Considere a transformação linear no espaço das matrizes reais 2×2

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{M}_{2\times 2} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2\times 2} \\ & X & \mapsto & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X \end{array}$$

que leva uma matriz X para a matriz produto MX onde $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
Determine a matriz que representa T relativamente à base ordenada de $\mathcal{M}_{2\times 2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Resolução: *Sejam*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

os elementos da base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$. As suas imagens

$$T(v_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = v_1 + v_3 ,$$

$$T(v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = v_2 + v_4 ,$$

$$T(v_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 2v_1 + 2v_3 , T(v_4) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2v_2 + 2v_4$$

têm coordenadas

$$(1,0,1,0) , (0,1,0,1) , (2,0,2,0) , (0,2,0,2)$$

na base v_1, v_2, v_3, v_4, respecitivamente. As colunas da matriz A que representa T em relação à base v_1, v_2, v_3, v_4 são formadas por estas coordenadas. Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

□

(3) No espaço de todos os polinómios reais de variável real considere os elementos $p_1(x) = 1 + x - 2x^2 + x^3$, $p_2(x) = x^2 - x^3$ e $p_3(x) = 1 + x - 2x^2 + 3x^3$.

(a) Determine uma base do subespaço $V = \mathcal{L}(p_1, p_2, p_3)$ gerado por estes três polinómios e indique a dimensão de V.

Resolução: *Na base* 1, x, x^2, x^3 *do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a* 3, *os polinómios* p_1, p_2 *e* p_3 *têm coordenadas* $(1, 1, -2, 1)$, $(0, 0, 1, -1)$ *e* $(1, 1, -2, 3)$, *respectivamente. Olhando para a forma escalonada da matriz cujas colunas são formadas por estas coordenadas*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

conclui-se que, como estas três colunas são linearmente independentes, os polinómios p_1, p_2 *e* p_3 *também são l. i., pelo que formam uma base do espaço por eles gerado. Portanto,* $\dim V = 3$. □

Comentário: *Alternativamente, poder-se-ia ter usado a definição de independência linear para verificar que* p_1, p_2 *e* p_3 *são l. i.* ♢

(b) Mostre que o conjunto $W = \{p \in V : p(0) = p(1)\}$ forma um subespaço de V e determine uma base de W.

Resolução: *Se* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $p, q \in W$ *(i.e.,* $p(0) = p(1)$ *e* $q(0) = q(1)$*), então*

$$(\lambda p + q)(0) = \lambda p(0) + q(0) = \lambda p(1) + q(1) = (\lambda p + q)(1) ,$$

pelo que $(\lambda p + q) \in W$, *e assim* W *forma um subespaço.*
Para que um polinómio $p = ap_1 + bp_2 + cp_3 \in W$ *(com* $a, b, c \in \mathbb{R}$*), tem que ser*

$$a \underbrace{p_1(0)}_{1} + b \underbrace{p_2(0)}_{0} + c \underbrace{p_3(0)}_{1} = a \underbrace{p_1(1)}_{1} + b \underbrace{p_2(1)}_{0} + c \underbrace{p_3(1)}_{3} ,$$

ou seja, $c = 3c$, *ou seja,* $c = 0$. *Conclui-se que*

$$p_1(x) = 1 + x - 2x^2 + x^3 \quad \text{e} \quad p_2(x) = x^2 - x^3$$

formam uma base de W. □

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Se uma matriz 2×2 tem característica 2, então as suas entradas da diagonal são não-nulas.

Verdadeira ☐ Falsa ☒

Resolução: *Por exemplo,* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *tem característica* 2 *(o que, por ser uma matriz* 2×2*, equivale a dizer que é invertível) e as suas entradas da diagonal são nulas.* $\square$

(b) Se as colunas de uma matriz quadrada formam uma base, então as linhas dessa matriz também formam uma base.

Verdadeira ☒ Falsa ☐

Resolução: *Se as colunas de uma matriz* $n \times n$ *formam uma base, então a característica dessa matriz é* n*, pelo que as* n *linhas são linearmente independentes em* $\mathbb{R}^n$*.* $\square$

(c) Se uma matriz quadrada A satisfaz $A^{100} = 0$, então a dimensão do seu núcleo é pelo menos 1.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *Se fosse* $\dim(\mathrm{Ker}\ A) = 0$, *então* $\mathrm{Ker}\ A = \{0\}$ *e* A *seria injectiva, pelo que qualquer sua potência também seria injectiva (a composicção de funções injectivas é injectiva), pelo que* A^{100} *não poderia ser a matriz nula.* □

(d) Duas matrizes semelhantes têm a mesma característica.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *Como a imagem de um subespaço de dimensão* m *por uma transformação invertível* S *tem dimensão* m, *a dimensão da imagem de* $S^{-1}A$ *(ou de* AS*) é igual à dimensão da imagem de* A, *qualquer que seja a matriz quadrada* A. *Logo,* $\dim(\mathrm{Im}\ A) = \dim(\mathrm{Im}\ (S^{-1}AS))$. □

(e) Se o núcleo de uma matriz A com dimensão 5×4 consiste apenas no vector zero, e se $AB = AC$ para duas matrizes B e C de dimensão 4×5, então essas matrizes B e C têm que ser iguais.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *Se* $\mathrm{Ker}\ A = \{0\}$, *então* A *é injectiva pelo que é invertível à esquerda. Seja* E *uma inversa de* A *à esquerda, i.e.,* $EA = \mathrm{Id}$. *Então*

$$AB = AC \Rightarrow E(AB) = E(AC) \Leftrightarrow (EA)B = (EA)C \Leftrightarrow B = C\ .$$

□