Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 3 – 25 DE NOVEMBRO DE 2003 – 11:10-12H

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada uma das alíneas dos problemas (1) e (3) vale 1 ponto, e cada uma das alíneas do problema (2) vale 2.5 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 5ª feira, 4 de Dezembro, 16h-17h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(1)(c)	
(1)(d)	
(1)(e)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(2)(c)	
(2)(d)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(3)(c)	
(3)(d)	
(3)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________

Nome: ______________________________

(1) Considere uma matriz 4×4 A com linhas w_1, w_2, w_3 e w_4 e com $\det A = 5$. Ache os determinantes das seguintes matrizes, apresentando apenas breves justificações.

(a) $\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_2 & - \\ - & w_2 + w_3 & - \\ - & w_4 & - \end{bmatrix}$ $\qquad \det(\text{a}) = \det A = 5$

porque somar uma linha a outra linha da matriz não afecta o determinante.

(b) $\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_2 & - \\ - & -w_3 & - \\ - & 3w_4 & - \end{bmatrix}$ $\qquad \det(\text{b}) = (-1) \times 3 \times \det A = -15$

porque sempre que se multiplica uma linha de uma matriz por uma constante o determinante é multiplicado por essa constante.

(c) $\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_3 & - \\ - & w_2 + w_3 & - \\ - & w_1 + w_4 & - \end{bmatrix}$ $\qquad \det(\text{c}) = \det \begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_3 & - \\ - & w_2 & - \\ - & w_4 & - \end{bmatrix} = -\det A = -5$

porque somar uma linha a outra linha da matriz não afecta o determinante e trocar duas linhas troca o sinal do determinante.

(d) $\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_2 + 4w_3 & - \\ - & w_3 + \frac{1}{4}w_2 & - \\ - & w_4 & - \end{bmatrix}$ $\qquad \det(\text{d}) = 0$

porque a segunda linha da matriz é quatro vezes a terceira, pelo que são dependentes e a matriz não é invertível.

(e) $\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ w_3 & w_2 & w_4 & w_1 \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$ $\qquad \det(\text{e}) = -\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ w_1 & w_2 & w_4 & w_3 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \det A^t = 5$

porque sempre que se troca duas colunas o determinante troca de sinal e o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta.

(2) Em $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual considere os vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{e} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Seja $V = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ o subespaço gerado pelos dois primeiros vectores.

(a) Ache uma base ortonormal para V.

Resolução: *Pelo processo de Gram-Schmidt: como* $|v_1| = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19}$, $v_1 \cdot v_2 = 0$ *e* $|v_2| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$,

$$w_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{19}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad w_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é uma base o.n. de V.

Comentário: *Alternativamente, observando logo que* v_1 *e* v_2 *são ortogonais, bastaria tomar* $w_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$ *e* $w_2 = \frac{v_2}{|v_2|}$, *sem sequer referir o processo de Gram-Schmidt.* □

(b) Determine a projecção ortogonal de v_3 no subespaço V.

Resolução: *Tem-se a fórmula para a projecção ortogonal*

$$\mathrm{proj}_V v_3 = (v_3 \cdot w_1) w_1 + (v_3 \cdot w_2) w_2$$

onde w_1 *e* w_2 *formam uma base o.n. de* V. *Como, relativamente à base encontrada na alínea anterior, tem-se* $v_3 \cdot w_1 = \frac{3}{\sqrt{19}}$ *e* $v_3 \cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, *conclui-se que*

$$\mathrm{proj}_V v_3 = \frac{3}{\sqrt{19}} \cdot \frac{1}{\sqrt{19}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{37}{38} \\ \frac{-1}{38} \\ \frac{3}{19} \end{bmatrix}.$$

□

(c) Calcule o volume do paralelepípedo definido por v_1, v_2 e v_3.

Resolução: *O volume do paralelepípedo definido por* v_1, v_2 *e* v_3 *é igual ao módulo do determinante da matriz cujas colunas são* v_1, v_2 *e* v_3. *Uma vez que, pela regra de Laplace ao longo da terceira coluna,*

$$\det \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \times \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \,,$$

conclui-se que o volume pedido é 1. □

(d) Ache uma base para o complemento ortogonal $V^\perp$.

Resolução: *O complemento ortogonal* $V^\perp$ *é o núcleo da matriz cujas linhas são os vectores* v_1 *e* v_2 *que geram* V. *Pelo método de eliminação de Gauss,*

$$\mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \,,$$

pelo que, por exemplo, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$ *forma uma base de* $V^\perp$. □

(3) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Se duas matrizes A e B são semelhantes, então $\det(ABA) = \det(BAB)$.

Verdadeira X Falsa ☐

Resolução: *Se* A *e* B *são semelhantes, então* $\det B = \det A$, *pelo que* $\det(ABA) = (\det A)(\det B)(\det A) = (\det B)(\det A)(\det B) = \det(BAB)$. $\square$

(b) Se uma matriz quadrada A é invertível, então a sua matriz dos cofactores também é invertível.

Verdadeira X Falsa ☐

Resolução: *Se* A *é invertível então* $\det A \neq 0$ *e, pela regra de Cramer,* $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{cof} A)^t$. *Se uma matriz* B *é invertível então tanto a sua inversa como a sua transposta são invertíveis. Portanto,* $\operatorname{cof} A = \det A (A^{-1})^t$ *é invertível.* $\square$

(c) Se $AA^t = A^2$ para uma matriz 2×2, então essa matriz tem que ser simétrica.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *Em termos das entradas de* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, *a hipótese* $AA^t = A^2$ *é*

$$\begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} b^2 = bc = c^2 \\ ab = ac \\ cd = bd\ . \end{cases}$$

A primeira linha só é satisfeita quando $b = c$, *ou seja, quando a matriz* A *é simétrica.* □

(d) Se uma matriz $n \times n$ A satisfaz $A^k = 0$ para algum inteiro positivo k, então 0 é o único valor próprio de A.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *Suponha-se que* λ *é um valor próprio de* A *e que* v *é um vector próprio associado. Se* $A^k = 0$, *então* $0 = A^k v = \lambda^k v$. *Como* $v \neq 0$, *de* $\lambda^k = 0$ *deduz-se que* $\lambda = 0$. □

(e) Se A é uma matriz 5×5 cujas entradas são todas 1 ou -1, então o determinante de A é divisível por 16 (i.e., $\det A = 16n$ para algum inteiro n).

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *Eventualmente multiplicando linhas e colunas de* A *por* 1 *ou* -1, *basta considerar o caso em que a primeira linha e a primeira coluna de* A *só têm* 1*'s. Subtraindo a primeira linha às restantes obtém-se uma matriz em que a primeira coluna é* $(1, 0, 0, 0, 0)$ *e as entradas do menor* A_{11} *são todas* 0 *ou* -2, *pelo que o determinante desse menor (sendo uma matriz* 4×4*) é múltiplo de* $2^4 = 16$. *O resultado segue então da fórmula de Laplace ao longo da primeira coluna.* □