Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 3 – 25 DE NOVEMBRO DE 2003 – 11:10-12H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada uma das alíneas dos problemas (1) e (3) vale 1 ponto, e cada uma das alíneas do problema (2) vale 2.5 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 5ª feira, 4 de Dezembro, 16h-17h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(1)(c)	
(1)(d)	
(1)(e)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(2)(c)	
(2)(d)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(3)(c)	
(3)(d)	
(3)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Considere uma matriz 4×4 A com linhas w_1, w_2, w_3 e w_4 e com $\det A = 3$. Ache os determinantes das seguintes matrizes, apresentando apenas breves justificações.

(a) $\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_2 & - \\ - & w_3 & - \\ - & w_1 + w_4 & - \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} - & 2w_1 & - \\ - & w_2 & - \\ - & -w_3 & - \\ - & -w_4 & - \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} - & w_1 + 5w_4 & - \\ - & w_2 & - \\ - & w_3 & - \\ - & w_4 + \frac{1}{5}w_1 & - \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} - & w_2 & - \\ - & w_1 + w_2 & - \\ - & w_3 & - \\ - & w_1 + w_4 & - \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ w_2 & w_4 & w_3 & w_1 \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$

(2) Em $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual considere os vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \text{e} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Seja $V = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ o subespaço gerado pelos dois primeiros vectores.

(a) Ache uma base ortonormal para V.

(b) Determine a projecção ortogonal de v_3 no subespaço V.

(c) Calcule o volume do paralelepípedo definido por v_1, v_2 e v_3.

(d) Ache uma base para o complemento ortogonal $V^{\perp}$.

(3) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Se duas matrizes A e B são semelhantes, então $\det(ABA) = \det(A^3)$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(b) Se uma matriz quadrada A é simétrica, então a sua matriz dos cofactores também é simétrica.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(c) Se u e v são dois vectores de $\mathbb{R}^n$, então a equação $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$ é satisfeita.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(d) Se uma matriz quadrada A não é invertível, então 0 é valor próprio de A.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(e) Se A é uma matriz 5×5 cujas entradas são todas 1 ou -1, então o determinante de A é divisível por 16 (i.e., $\det A = 16n$ para algum inteiro n).

Verdadeira ☐ Falsa ☐