Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 3 – 25 DE NOVEMBRO DE 2003 – 8:10-9H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada uma das alíneas dos problemas (1) e (3) vale 1 ponto, e cada uma das alíneas do problema (2) vale 2.5 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 5ª feira, 4 de Dezembro, 16h-17h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(1)(c)	
(1)(d)	
(1)(e)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(2)(c)	
(2)(d)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(3)(c)	
(3)(d)	
(3)(e)	
total	

Nº:

Curso: ______________

Nome: ____

(1) Considere uma matriz 4×4 A com linhas w_1, w_2, w_3 e w_4 e com $\det A = 3$. Ache os determinantes das seguintes matrizes, apresentando apenas breves justificações.

(a) $\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_1 + w_2 & - \\ - & w_3 & - \\ - & w_4 & - \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_2 & - \\ - & 5w_3 & - \\ - & -w_4 & - \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_2 + 5w_4 & - \\ - & w_3 & - \\ - & w_4 + \frac{1}{5}w_2 & - \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_2 + w_3 & - \\ - & w_3 + w_4 & - \\ - & w_3 & - \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ w_1 & w_3 & w_4 & w_2 \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$

(2) Em $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual considere os vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \text{e} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Seja $V = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ o subespaço gerado pelos dois primeiros vectores.

(a) Ache uma base ortonormal para V.

(b) Determine a projecção ortogonal de v_3 no subespaço V.

(c) Calcule o volume do paralelepípedo definido por v_1, v_2 e v_3.

(d) Ache uma base para o complemento ortogonal $V^{\perp}$.

(3) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) A matriz $A = \begin{bmatrix} k^2 & 1 & 4 \\ k & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível para qualquer valor de $k \in \mathbb{R}$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(b) Há matrizes 3×3 invertíveis A e S com $S^{-1}AS = 2A$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(c) Há um subespaço V de $\mathbb{R}^5$ com $\dim V = \dim V^{\perp}$, onde $V^{\perp}$ representa o seu complemento ortogonal.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(d) Se λ é um valor próprio de duas matrizes $n \times n$ A e B, então λ é um valor próprio de AB.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(e) Se A é uma matriz 4×4 cujas entradas são todas 1 ou -1, então o determinante de A é divisível por 8 (i.e., $\det A = 8n$ para algum inteiro n).

Verdadeira ☐ Falsa ☐