Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 20/Nov/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 3 PARA PRATICAR – NOVEMBRO DE 2003

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Duração: 50 minutos

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- O problema (1) vale 5 pontos, cada uma das alíneas do problema (2) vale 2.5 pontos e cada uma das alíneas do problema (3) vale 1 ponto.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 5ª feira, 4 de Dezembro, 16h-17h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(2)(c)	
(2)(d)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(3)(c)	
(3)(d)	
(3)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Resolução: *Pela fórmula de Laplace ao longo da 5ª coluna, e depois ao longo da 1ª coluna, e depois ao longo da 2ª coluna,*

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \times \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -2 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ &= -2 \times 3 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \\ &= 24 . \end{aligned}$$

□

(2) Considere a função real definida em pares de vectores u e v de $\mathbb{R}^3$ por

$$\langle u, v\rangle = u^t G v \quad \text{onde} \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

(a) Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Resolução: *Há que verificar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ satisfaz a simetria, a linearidade e a positividade.*

- $\langle v, u\rangle = v^t G u = (v^t G u)^t = u^t G^t v = u^t G v = \langle u, v\rangle$, *porque o transposto de um escalar é o próprio escalar e porque G é uma matriz simétrica.*
- $\langle \lambda u + w, v\rangle = (\lambda u + w)^t G v = \lambda u^t G v + w^t G v = \lambda \langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$.
- *Para* $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, *tem-se*

$$\begin{aligned} \langle v, v\rangle &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2x^2 + 2xy + y^2 + z^2 \\ &= x^2 + (x+y)^2 + z^2 \geq 0 \text{ sempre} \\ &\qquad\qquad\qquad\quad = 0 \text{ sse } v = 0 . \end{aligned}$$

$\square$

(b) Seja L o subespaço gerado por $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Determine o complemento ortogonal $L^\perp$ relativamente ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Resolução: *O complemento ortogonal $L^\perp$ é o conjunto dos vectores perpendiculares ao vector* $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \iff 3x + y + 3z = 0 .$$

Logo,

$$L^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : 3x + y + 3z = 0 \right\} .$$

$\square$

(c) Determine, pelo processo de Gram-Schmidt, uma base ortonormal para L e uma para $L^\perp$ (relativamente ao produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$).

Resolução: *Uma base de L é formada por $\frac{v}{|v|}$ onde v é o vector que gera este subespaço. O quadrado dessa norma é $|v|^2 = \langle v, v\rangle = 14$. Logo, uma base de L é $w = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.*

Para obter uma base o.n. de $L^\perp$ formada por vectores w_1 e w_2, aplica-se o processo de Gram-Schmidt a uma base de $L^\perp$ escolhida a partir da alínea anterior: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Como $|v_1|^2 = \langle v_1, v_1\rangle = 5$, vem $w_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Como $v_2 \cdot w_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ e $v_2 - (v_2 \cdot w_1)w_1 = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -1 \end{bmatrix}$, vem $w_2 = \frac{v_2-(v_2\cdot w_1)w_1}{|v_2-(v_2\cdot w_1)w_1|} = \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$. □

(d) Determine a distância do ponto $(0, 1, 0)$ a $L^\perp$ (relativamente a $\langle\cdot,\cdot\rangle$).

Resolução: *A projecção de $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ em L é*

$$\mathrm{proj}_L u = \langle u, w\rangle w = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} w = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

A distância de $(0, 1, 0)$ a $L^\perp$ é a norma deste vector:

$$|\mathrm{proj}_L u| = |\langle u, w\rangle| = \frac{1}{\sqrt{14}}\ .$$

□

(3) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Se uma matriz A é simétrica e se a matriz S é ortogonal, então a matriz $S^{-1}AS$ é simétrica.

Verdadeira $\boxed{\text{X}}$ Falsa $\boxed{}$

Resolução: *Como S é ortogonal, $S^t = S^{-1}$, e como A é simétrica, tem-se*

$$(S^{-1}AS)^t = \underbrace{S^t}_{S^{-1}} A^t \underbrace{(S^{-1})^t}_{S} = S^{-1}A^tS = S^{-1}AS\ .$$

$\square$

(b) Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais quaisquer, então verifica-se a desigualdade

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2\ .$$

Verdadeira $\boxed{\text{X}}$ Falsa $\boxed{}$

Resolução: *Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz para o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ dos vectores* $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, *tem-se*

$$\underbrace{\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right)^2}_{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} \leq \underbrace{\left\|\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right\|^2}_{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \underbrace{\left\|\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right\|^2}_{n}$$

$\square$

(c) Se todas as entradas da diagonal de uma matriz quadrada A são números inteiros ímpares e se todas as outras entradas são números inteiros pares, então A tem que ser invertível.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *O produto das entradas da diagonal de A é a única parcela ímpar no somatório da definição do determinante de A, sendo todas as outras parcelas pares. Uma soma de um número ímpar com números pares nunca é zero. Como $\det A \neq 0$, a matriz A é invertível.* $\square$

(d) Se uma matriz A é invertível e tanto A como A^{-1} têm todas as entradas inteiras, então $\det A = \pm 1$.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *Os determinantes de A e de A^{-1} são números inteiros com produto $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$. O produto de dois números inteiros só é 1 se ambos os factores forem 1 ou ambos forem -1.* $\square$

(e) Se 1 é o único valor próprio de uma matriz A, então A tem que ser uma matriz identidade Id.

Verdadeira [ ] Falsa [X]

Resolução: *Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não é a identidade mas só tem o valor próprio 1.* $\square$