Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 4 – 9 DE DEZEMBRO DE 2003 – 11:10-12H

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação igualmente repartida pelas alíneas de cada problema.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 3ª feira, 16 de Dezembro, 16h-17h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule os valores e os vectores próprios (eventualmente complexos) de A.

Resolução: *Os valores próprios de A são as soluções de*

$$\det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff \lambda^2+2\lambda+2 = 0 \iff \lambda = -1 \pm i \,.$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $-1+i$ são os vectores não nulos de

$$\mathrm{Ker}\ (A - (-1+i)\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\ \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} = \mathcal{L} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} .$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\overline{\lambda} = -1 - i$ são os vectores complexos conjugados dos vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = -1+i$. □

(b) Decida se A é diagonalizável (eventualmente sobre $\mathbb{C}$) e em caso afirmativo escreva uma diagonalização, i.e., escreva A na forma SDS^{-1} onde D é uma matriz diagonal e S é uma matriz de mudança de base.

Resolução: *Como A é uma matriz 2×2 e admite dois vectores próprios l.i., por exemplo, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ e $\overline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$, conclui-se que é diagonalizável. Uma diagonalização para A é*

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} .$$

□

(2) Considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule os valores e os vectores próprios (eventualmente complexos) de B.

Resolução: *Os valores próprios de B são as soluções de*

$$\det \begin{bmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 8 & 7-\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \iff \lambda = 3 .$$

Os vectores próprios de B são os vectores não nulos de $\operatorname{Ker}(B - 3\mathrm{Id})$*:*

$$\operatorname{Ker} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) .$$

Logo são os vectores da forma $\begin{bmatrix} a \\ -2a \end{bmatrix}$ *com* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. □

(b) Escreva uma decomposição de Jordan para B (eventualmente sobre $\mathbb{C}$), i.e., escreva B na forma SJS^{-1} onde J é uma forma canónica de Jordan e S é uma matriz de mudança de base.

Resolução: *Não havendo dois, mas apenas um vector próprio l.i., uma forma canónica de Jordan para B será*

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} .$$

Para a matriz de mudança de base procura-se um vector próprio generalizado. Para o vector próprio $v = (1, -2)^t$, a equação

$$(B - 3\mathrm{Id})w = v \iff \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

admite a solução $w = (0, -\frac{1}{2})^t$, por exemplo. Então uma decomposição de Jordan para B será

$$B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} .$$

□

(3) Para um parâmetro $k \in \mathbb{R}$ arbitrário, considere a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule os valores próprios (eventualmente complexos) de C em função de k.

Resolução: *Os valores próprios de C são as soluções de*

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & & \\ 1 & -\lambda & k \\ 2 & 3 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff -\lambda(\lambda^2 - 3k) = 0 ,$$

onde o determinante foi calculado pela fórmula de Laplace ao longo da 1ª linha. Se $k = 0$, zero é o único valor próprio de C. Se $k \neq 0$, os valores próprios de C são 0 e as duas raízes quadradas (reais ou complexas) de $3k$. □

(b) Para que valores de k é que a matriz C é diagonalizável (sobre $\mathbb{C}$)?

Resolução: *Quando $k \neq 0$, a matriz C tem três valores próprios distintos, logo admite uma base de vectores próprios e portanto é diagonalizável.*
Quando $k = 0$, o espaço próprio do único valor próprio, zero,

$$E_0 = \operatorname{Ker} C = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

tem dimensão 1 (porque a matriz tem característica 2), pelo que não há três vectores próprios linearmente independentes e por isso C não é diagonalizável. □

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Se uma matriz 11×11 tem os valores próprios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11, então essa matriz é diagonalizável.

Verdadeira $\boxed{X}$ Falsa $\boxed{}$

Resolução: *Se uma matriz 11×11 tem 11 valores próprios distintos, então tem 11 vectores próprios linearmente independentes, pelo que há uma base própria dessa matriz e a matriz é diagonalizável.* $\square$

(b) Se v é um vector próprio de duas matrizes $n \times n$, A e B, com A invertível, então v é um vector próprio de $3A^{-1} + AB$.

Verdadeira $\boxed{X}$ Falsa $\boxed{}$

Resolução: *Se $Av = \lambda v$ (com $\lambda \neq 0$ porque A é invertível) e $Bv = \mu v$, então $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$ e $(3A^{-1} + AB)v = 3A^{-1}v + ABv = \frac{3}{\lambda}v + A(\mu v) = (\frac{3}{\lambda} + \mu\lambda)v$.* $\square$

(c) Se o determinante de uma matriz real 2×2 A é negativo, então A tem dois valores próprios reais distintos.

Verdadeira X Falsa

Resolução: *O determinante de A é o produto dos valores próprios de A. Se algum valor próprio não for real, então os valores próprios são dois complexos conjugados pelo que o seu produto é positivo (igual ao quadrado do módulo de qualquer um deles). Se os valores próprios forem reais e iguais, então o seu produto é não negativo.* $\square$

(d) Duas matrizes A e B diagonalizáveis, $n \times n$ e com os mesmos valores próprios têm que ser matrizes semelhantes.

Verdadeira Falsa X

Resolução: *Por exemplo,* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *são diagonais, têm os mesmos valores próprios mas não são semelhantes.*

Comentário: *Assumindo que as multiplicidades algébricas dos valores próprios fossem também as mesmas para as matrizes A e B, então ambas as matrizes seriam semelhantes a uma mesma matriz diagonal, pelo que seriam semelhantes entre si.* $\square$

(e) Para quaisquer matrizes $n \times n$, A e B, as matrizes produto AB e BA têm os mesmos valores próprios.

Verdadeira X Falsa

Resolução: *Se 0 é valor próprio de AB, então AB não é invertível, pelo que algum dos factores A ou B não é invertível, o produto BA não é invertível e por isso tem o valor próprio 0. Notando que, se $AB - \mathrm{Id}$ é invertível, então $BA - \mathrm{Id}$ também com inversa $(BA - \mathrm{Id})^{-1} = B(AB - \mathrm{Id})^{-1}A - \mathrm{Id}$ e vice-versa, conclui-se que, para $\lambda \neq 0$, a matriz $AB - \lambda\mathrm{Id}$ é invertível sse $BA - \lambda\mathrm{Id} = \lambda(B\frac{1}{\lambda}A - \mathrm{Id})$ é invertível. Logo os valores para os quais $AB - \lambda\mathrm{Id}$ não é invertível (i.e., os valores próprios de AB) são os mesmos valores para os quais $BA - \lambda\mathrm{Id}$ não é invertível (i.e., os valores próprios de BA).* $\square$