Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 4 – 9 DE DEZEMBRO DE 2003 – 8:10-9H

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação igualmente repartida pelas alíneas de cada problema.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 3ª feira, 16 de Dezembro, 16h-17h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: ________________

Nome: ____

(1) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule os valores e os vectores próprios (eventualmente complexos) de A.

Resolução: *Os valores próprios de A são as soluções de*

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(\lambda^2+9) = 0 \iff \lambda = 1 \text{ ou } \pm 3i$$

onde o determinante foi calculado pela fórmula de Laplace ao longo da 2ª linha. Os vectores próprios de A associados ao valor próprio 1 são os vectores não nulos de

$$\mathrm{Ker}\ (A - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathcal{L} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $3i$ são os vectores não nulos de

$$\mathrm{Ker}\ (A - 3i\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} -3i & 0 & 3 \\ 0 & 1-3i & 0 \\ -3 & 0 & -3i \end{bmatrix} = \mathcal{L} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix} .$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\overline{\lambda} = -3i$ são os vectores complexos conjugados dos vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 3i$. □

(b) Decida se A é diagonalizável (eventualmente sobre $\mathbb{C}$) e em caso afirmativo escreva uma diagonalização, i.e., escreva A na forma SDS^{-1} onde D é uma matriz diagonal e S é uma matriz de mudança de base.

Resolução: *Como A é uma matriz 3×3 e admite três vectores próprios l.i., por exemplo, $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$ e $\overline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{bmatrix}$, conclui-se que é diagonalizável. Uma diagonalização para A é*

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & -i \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 3i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3i \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{i}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} .$$

□

(2) Considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule os valores e os vectores próprios (eventualmente complexos) de B.

Resolução: *Os valores próprios de B são as soluções de*

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \iff \lambda = 4 .$$

Os vectores próprios de B são os vectores não nulos de

$$\text{Ker } (B - 4\text{Id}) = \text{Ker } \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) .$$

Logo são os vectores da forma $\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$ *com* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. □

(b) Escreva uma decomposição de Jordan para B (eventualmente sobre $\mathbb{C}$), i.e., escreva B na forma SJS^{-1} onde J é uma forma canónica de Jordan e S é uma matriz de mudança de base.

Resolução: *Não havendo dois, mas apenas um vector próprio l.i., uma forma canónica de Jordan para B será*

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} .$$

Para a matriz de mudança de base procura-se um vector próprio generalizado. Para o vector próprio $v = (1,1)^t$, a equação

$$(B - 4\text{Id})w = v \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

admite a solução $w = (0,1)^t$, por exemplo. Então uma decomposição de Jordan para B será

$$B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} .$$

□

(3) Para um parâmetro $k \in \mathbb{R}$ arbitrário, considere a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule os valores próprios (eventualmente complexos) de C em função de k.

Resolução: *Os valores próprios de C são as soluções de*

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & & \\ 1 & -\lambda & k \\ & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff -\lambda(\lambda^2 - k) = 0 ,$$

onde o determinante foi calculado pela fórmula de Laplace ao longo da 1ª linha. Se $k = 0$, zero é o único valor próprio de C. Se $k \neq 0$, os valores próprios de C são 0 e as duas raízes quadradas (reais ou complexas) de k. □

(b) Para que valores de k é que a matriz C é diagonalizável (sobre $\mathbb{C}$)?

Resolução: *Quando $k \neq 0$, a matriz C tem três valores próprios distintos, logo admite uma base de vectores próprios e portanto é diagonalizável.*
Quando $k = 0$, o espaço próprio do único valor próprio, zero,

$$E_0 = \text{Ker } C = \text{Ker } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem dimensão 1 (porque a matriz tem característica 2), pelo que não há três vectores próprios linearmente independentes e por isso C não é diagonalizável. □

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Os valores próprios de uma matriz diagonal são as suas entradas da diagonal principal.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *Se A é diagonal, então $A-\lambda\mathrm{Id}$ é diagonal, pelo que o polinómio característico $p_A(\lambda) = \det(A-\lambda\mathrm{Id})$ é o produto das entradas da diagonal de $A - \lambda\mathrm{Id}$ que são da forma $a_{ii} - \lambda$ onde a_{ii} é a i-ésima entrada da diagonal de A. Os valores próprios de A, que são as raízes de $p_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$, são então as entradas da diagonal de A, $a_{11}, \dots, a_{nn}$.* □

(b) Se uma matriz A é diagonalizável, então $(A^t)^2$ é diagonalizável.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *Se A é diagonalizável com $A = SDS^{-1}$ e D diagonal, então $A^t = (SDS^{-1})^t = (S^{-1})^t D^t S^t$ onde D^t é diagonal, e $(A^t)^2 = (S^{-1})^t D^t S^t (S^{-1})^t D^t S^t = (S^{-1})^t (D^t)^2 S^t$ onde $(D^t)^2$ é diagonal e S^t é a inversa da mudança de base $(S^{-1})^t$.* □

(c) Qualquer matriz invertível é diagonalizável (sobre $\mathbb{C}$).

Verdadeira ☐ Falsa ☒

Resolução: *Por exemplo, o bloco de Jordan* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *é invertível, mas não é diagonalizável.* $\square$

(d) Se a característica de uma matriz $n \times n$ é estritamente menor do que n, então 0 é um valor próprio dessa matriz.

Verdadeira ☒ Falsa ☐

Resolução: *Se a característica de uma matriz* $n \times n$ A *é estritamente menor do que* n*, então* $\dim \mathrm{Ker}\ A \geq 1$*, pelo que existe um vector não nulo* v *tal que* $Av = 0$*, ou seja, um vector próprio associado ao valor* $\lambda = 0$*, e* 0 *é valor próprio de* A*.* $\square$

(e) Se A e B são matrizes $n \times n$ diagonalizáveis sobre $\mathbb{R}$ que comutam, então existe uma base de $\mathbb{R}^n$ constituída por vectores próprios de A e B simultaneamente.

Verdadeira ☒ Falsa ☐

Resolução: *Cada espaço próprio de* A *é invariante por* B *logo, considerando a restrição de* B *a esse espaço, é gerado por vectores próprios de* B*. A soma dos espaços próprios de* A *é* $\mathbb{R}^n$*. Conclui-se que há vectores próprios de* A *e de* B *simultaneamente que geram* $\mathbb{R}^n$ *e, por isso, que há uma base de* $\mathbb{R}^n$ *constituída por vectores próprios de* A *e* B *simultaneamente.*
Comentário: *Diz-se então que* A *e* B *são* simultaneamente diagonalizáveis $\square$