Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 9/11/2000

ANÁLISE MATEMÁTICA III

FÍSICA E MATEMÁTICA

1º TESTE PARA PRATICAR (DURAÇÃO: 1H30)

apresente e justifique todos os cálculos
cotação: 2.5 valores por alínea

(1) Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (\sin x - \cos y, \frac{y}{\pi})$ é invertível numa vizinhança de (π, π) e calcule a derivada da função inversa no ponto $(1,1)$.

(2) Considere a função $g(x,y) = e^{x^2} + y^2$.
  (a) Quais são os conjuntos de nível de g que pode garantir serem variedades de dimensão 1?
  (b) Calcule o espaço normal a $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 2\}$ no ponto $(0,1)$.
  (c) Calcule o máximo da função $f(x,y) = y^3$ sobre o conjunto X da alínea anterior.

(3) Esboce o conjunto
$$X = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 2\,,\ -1 < x^2 - y^2 < 1\,,\ x > 0\,,\ y > 0\}$$
e calcule $\int_X xy\, dV$ recorrendo à mudança de coordenadas $g(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$.

(4) Use coordenadas esféricas para calcular o volume do sólido
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\,,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2}\}\ .$$

(5) Seja p um polinómio e c uma constante real positiva. Mostre que o seguinte integral existe (finito):
$$\int_0^{+\infty} p(x) e^{-cx}\, dx\ .$$

(6) Seja $f_1, f_2, \ldots$ uma sucessão de funções integráveis sobre um conjunto mensurável X. Suponha que a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_X |f_k|\, dV$ é finita. Seja $g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(x)|$. Uma vez que os termos desta série são não-negativos, para cada $x \in X$, ela ou converge ou diverge para $+\infty$. Mostre que g é integrável sobre X e portanto $g(x)$ é finito quase em toda a parte em X.

Soluções muito sumárias:

(1) Uma vez que f é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e que a sua jacobiana, $f'(x,y) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin y \\ 0 & \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}$, no ponto (π,π) tem determinante $\det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\pi} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\pi}$ não nulo, pelo teorema da função inversa conclui-se que f é localmente invertível perto de (π,π). Pela regra da cadeia, a derivada da correspondente função inversa f^{-1} no ponto $f(\pi,\pi) = (1,1)$ é a inversa da derivada de f em (π,π):

$$(f^{-1})'(1,1) = \left(f'(\pi,\pi)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} .$$

(2) (a) Para $c < 1$, o nível $X_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = c\}$ é vazio, portanto não é uma variedade por convenção. Como a jacobiana $g'(x,y) = [2xe^{x^2} \quad 2y]$ só não tem característica máxima na origem onde $g(0,0) = 1$, pode-se garantir que todos os níveis X_c com $c > 1$ são variedades de dimensão $2 - 1 = 1$. O nível X_1, sendo constituído só pelo ponto $(0,0)$, é uma variedade de dimensão 0.

(b) O espaço normal a X em $(0,1)$ é gerado pelo vector $\operatorname{grad} g\,(0,1) = [0 \quad 2]$, logo é o espaço vectorial $\{(0,u) : u \in \mathbb{R}\}$.

(c) Pela regra dos multiplicadores de Lagrange, existe um número real λ tal que o máximo de f sobre a variedade X é um ponto crítico da função $F(x,y) = y^3 + \lambda(e^{x^2} + y^2 - 2)$. As soluções do sistema

$$\begin{cases} 2\lambda x e^{x^2} = 0 \\ 3y^2 + 2\lambda y = 0 \\ e^{x^2} + y^2 = 2 \end{cases} \iff \ldots \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ y = 0 \\ x = \pm\sqrt{\ln 2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = \ldots \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

correspondem aos valores $g(\pm\sqrt{\ln 2}, 0) = 0$, $g(0,1) = 1$ e $g(0,-1) = -1$, pelo que o máximo de f no conjunto compacto X é 1.

(3) Como $g(X) = \{(u,v) : 0 < u < 2\,,\ -1 < v < 1\,,\ -u < v < u\}$ e $\det g'(x,y) = \det \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix} = -8xy$, pelos teoremas de mudança de coordenadas para o integral e de Fubini, obtém-se

$$\int_X xy\, dV = \int_X \frac{1}{8} |\det g'|\, dV = \int_{g(X)} \frac{1}{8}\, dV = \int_{-1}^{1} \int_{|v|}^{2} \frac{1}{8}\, du\, dv = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_v^2 du\, dv = \frac{3}{8} .$$

(4) O conjunto das coordenadas esféricas dos pontos do sólido menos o semi-plano $\{(x,0,z) : x \geq 0\}$ é $\{(r,\theta,\varphi) : 1 \leq r \leq 2\,,\ 0 < \theta < 2\pi\,,\ 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{4}\}$, pelo que o volume do sólido é

$$\int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta\, dr = 2\pi \cdot \int_1^2 r\, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\, d\varphi = 3\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) .$$

(5) Como $\lim_{x\to+\infty} x^2 p(x) e^{-cx} = 0$, existe $R > 0$ tal que $x > R \Rightarrow |p(x)e^{-cx}| \leq \frac{1}{x^2}$. A função definida por

$$g(x) = \begin{cases} M & \text{se } x \leq R \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x > R\,, \end{cases}$$

onde M é o máximo de $|p(x)e^{-cx}|$ em $[0,R]$, é integrável sobre $[0,+\infty[$: $\int_0^{+\infty} g(x)\, dx = MR + \frac{1}{R} < +\infty$. Como $|p(x)e^{-cx}| \leq g(x)$, $\forall x \in [0,+\infty[$, conclui-se que $\int_0^{+\infty} p(x)e^{-cx}\, dx < +\infty$

(6) Considere-se a sucessão não decrescente de funções mensuráveis $g_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|$, $n = 1,2,\ldots$, com $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = g(x)$, $\forall x \in X$. Pelo teorema da convergência monótona,

$$\int_X g\, dV = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n\, dV = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\, dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X |f_k|\, dV = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_X |f_k|\, dV .$$

Pela hipótese, conclui-se que $\int_X g\, dV < +\infty$, pelo que g é integrável sobre X. Se o conjunto $\{x \in X : g(x) = +\infty\}$ tivesse medida positiva, o integral de g sobre X seria infinito.