Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 11/1/2001

ANÁLISE MATEMÁTICA III

FÍSICA E MATEMÁTICA

2º TESTE PARA PRATICAR (DURAÇÃO: 1H30)

apresente e justifique todos os cálculos
cotação: 2.5 valores por alínea

(1) Mostre que, se ω é uma forma exacta, então $\omega \wedge \omega$ também é exacta.

(2) Considere o gráfico X em $\mathbb{R}^3$ da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
  (a) Calcule o espaço tangente e o espaço normal a X no ponto $(1,1,1)$.
  (b) Calcule a área da porção de X sobre o disco de raio 1 e centro na origem.

(3) Seja A a porção do hiperbolóide $x^2 = y^2 + z^2 + 1$ na faixa $1 \leq x < \sqrt{2}$.
  (a) Calcule a orientação de A com componente o^{23} positiva.
  (b) Calcule $\int_{A^o} xy\, dx \wedge dz$ onde o é a orientação da alínea (a).

(4) Considere a variedade $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 3 + z^2\}$ e o seu subconjunto $A = \{(x,y,z) \in X : -1 < z < 1\}$.
  (a) Verifique que A é um domínio regular, descreva ∂A e parametrize ∂A.
  (b) Use o teorema de Stokes para calcular $\int_{A^o} d\omega$, onde $\omega = yz\, dx + e^{x^2}\, dz$ e onde o é uma orientação de A à sua escolha.

(5) Decida se a forma-1

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$

é exacta em cada um dos seguintes domínios:

$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$,
$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$ e
$A_3 = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0\ ,\ \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi\}$.

Soluções muito sumárias:

(1) Seja r o grau de ω. Por hipótese, $\omega = d\alpha$ para alguma forma-$(r-1)$ α. Logo, ω é fechada, i.e. $d\omega = 0$. Seja $\beta = \alpha \wedge \omega$. Esta forma-$(2r-1)$ satisfaz

$$d\beta = \underbrace{d\alpha}_{\omega} \wedge \omega + (-1)^{r-1} \alpha \wedge \underbrace{d\omega}_{0} = \omega \wedge \omega \ ,$$

logo $\omega \wedge \omega$ é exacta.

(2) (a) $X = \{(x, y, \frac{1}{2}(x^2 + y^2)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ é uma variedade de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$. Em cada ponto $(x, y, z) \in X$, o espaço tangente de X é gerado pelos vectores $(1, 0, x)$ e $(0, 1, y)$ e o espaço normal é gerado por $(x, y, -1)$, por exemplo. Portanto,

$$T_{(1,1,1)}X = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle \qquad \text{e} \qquad N_{(1,1,1)}X = \langle (1, 1, -1) \rangle \ .$$

(b) A porção A indicada tem parametrização global $g : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \to A$ dada por $g(x, y) = (x, y, \frac{1}{2}(x^2 + y^2))$. Como $g'(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$, tem-se $\mathcal{J}g(x, y) = |(e_1 + xe_3) \wedge (e_2 + ye_3)| = |e_{12} + ye_{13} - xe_{23}| = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$. Assim, usando coordenadas polares e o teorema de Fubini, a área de A é

$$V_2(A) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\, r \, dr \, d\theta = \frac{2\pi}{3} \left(\sqrt{8} - 1 \right) \ .$$

(3) (a) Considere-se a parametrização de A (excepto uma curva que tem medida bidimensional nula) dada por coordenadas polares no plano yz, $g :]0, 1[\times]0, 2\pi[\to A$, $g(r, \theta) = (\sqrt{r^2 + 1}, r \cos \theta, r \sin \theta)$. A orientação em A induzida por g,

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial r} \wedge \frac{\partial g}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial g}{\partial r} \wedge \frac{\partial g}{\partial \theta} \right|} = \frac{-\frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{r^2+1}} e_{12} + \frac{r^2 \cos \theta}{\sqrt{r^2+1}} e_{13} + r e_{23}}{\left| r \sqrt{2 - \frac{1}{r^2+1}} \right|} \ ,$$

tem componente em e_{23} positiva, pelo que esta é a orientação o pedida.

(b)

$$\int_{A^o} xy \, dx \wedge dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1}(r \cos \theta) \frac{r^2 \cos \theta}{\sqrt{r^2 + 1}} \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \cdot \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{\pi}{4} \ .$$

(4) (a) A é um subconjunto aberto de X, o seu fecho $\overline{A} = \{(x, y, z) \in X : -1 \le z \le 1\}$ é um subconjunto compacto de X, a sua fronteira ∂A é formada por duas circunferências que são variedades de dimensão 1 e de classe C^∞, e $A = \operatorname{Int} \overline{A}$ em X. $\partial A = C_1 \cup C_2$ onde C_1 é uma circunferência no plano $z = -1$ de raio 2 e centrada em $(0, 0, -1)$ e C_2 é uma circunferência no plano $z = 1$ de raio 2 e centrada em $(0, 0, 1)$. Cada C_i admite uma parametrização $g_i :]0, 2\pi[\to C_i$ (a qual só não cobre um ponto):

$$g_1(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, -1) \ , \qquad g_2(\theta) = (2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 1) \ .$$

(b) Para as parametrizações da alínea (a), tem-se

$$\begin{array}{rclcrcl} o(g_1(\theta)) & = & -\sin \theta \, e_1 + \cos \theta \, e_2 & \text{e} & o(g_2(\theta)) & = & \cos \theta \, e_1 - \sin \theta \, e_2 \ , \\ \mathcal{J}g_1(\theta) & = & |g_1'(\theta)| = 2 & \text{e} & \mathcal{J}g_2(\theta) & = & |g_2'(\theta)| = 2 \ . \end{array}$$

(Note-se que uma orientação em A determina a orientação em cada uma das componentes de ∂A, daí a escolha das parametrizações da alínea (a).) Logo, pelo teorema de Stokes, o integral pedido é

$$\int_{A^o} d\omega = \int_{\partial A^o} \omega = \int_0^{2\pi} (-2 \sin \theta)(-\sin \theta) \, 2 \, d\theta + \int_0^{2\pi} (2 \cos \theta)(\cos \theta) \, 2 \, d\theta = 4 \ .$$

(5) Como $d\omega = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2+y^2} \right) dx \wedge dy = \ldots = 0$, a forma ω é fechada.
Sendo A_1 um domínio em forma de estrela (pode-se tomar para centro dos raios qualquer ponto em A_1), conclui-se pelo lema de Poincaré que ω é exacta em A_1.
Considerando uma circunferência $X \subset A_2$ de raio $R > 1$ e centro na origem, verifica-se que

$$\int_{X^o} \omega = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-R \sin \theta}{R^2} (-R \sin \theta) + \frac{R \cos \theta}{R^2} (R \cos \theta) \right) d\theta = 2\pi$$

onde o é a orientação do sentido directo. Conclui-se, pelo teorema de Stokes, que ω não é exacta em A_2 (se fosse exacta, o integral seria zero porque X é compacta e $\partial X = \emptyset$).
Como A_3 é um domínio simplesmente conexo e ω é uma forma-1 fechada, conclui-se que ω é exacta em A_3.