Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2001/2002

1º Exame e 2º Teste

11 de Janeiro de 2002 – 17 horas

1º exame: todos os grupos. Duração: 3h
2º teste: grupos 4, 5 e 6. Duração: 1h30m

Apresente todos os cálculos

(1.5 val.) **1.** Considere a região

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 < y < 2x \ , \ x < 1\}$$

e a função $f \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = xy$. Determine $\iint_D f$.

2. Considere a região $V \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \ 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(2 val.) (b) Seja $f(x, y, z) = xy^2$. Calcule $\iiint_V f$.

3. Considere o campo vectorial

$$f(x, y, z) = (\frac{-y}{x^2 + y^2} + x, \frac{x}{x^2 + y^2} + y, z^2),$$

definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$.

(1.5 val.) (a) Determine se f é ou não um campo fechado.

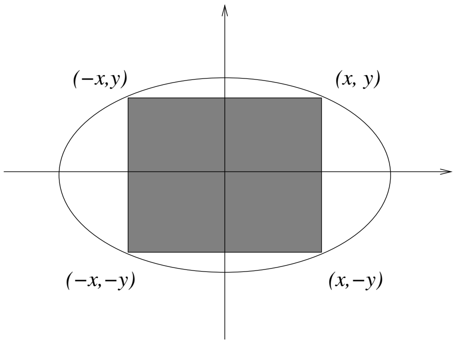
(1.5 val.) (b) Determine se f é ou não um gradiente no seu domínio. Justifique.

(1.5 val.) (c) Calcule o trabalho de f ao longo do arco de circunferência vertical definido pelas condições $x = 0$, $y^2 + z^2 = 4$, $-1 < z < 1$, $y > 0$, num sentido à sua escolha.

Volte S. F. F.

INÍCIO DO 2ºTESTE

(1.5 val.) **4.** Um rectângulo está inscrito na elipse de equação $x^2 + 4y^2 = 1$ como mostra a figura. Escreva a área do rectângulo como função de (x, y). Determine a área do maior rectângulo nestas condições.



5. Considere o campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, y, 2x - z)$ e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 4 - x^2 - z^2 \,,\, 0 < y < 3\}.$$

(1.5 val.) (a) Determine o espaço normal a S no ponto $(1, 2, 1)$.

(b) Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S, no sentido da normal unitária exterior ao sólido limitado por S e pelos planos $y = 0$ e $y = 3$,

(2 val.) (i) usando o teorema da divergência;

(2 val.) (ii) pela definição de fluxo;

(1.5 val.) (iii) usando o teorema de Stokes.

(1.5 val.) **6.** Seja

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; |z| < 1,\; x^2 + \frac{y^2}{4} > 1\right\} ,$$

e f a função em D dada por

$$f(x, y, z) = \frac{\operatorname{sen}\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2\right)}{\left(x^2 + \frac{y^2}{4}\right)^2} .$$

Mostre que f é integrável. Encontre um majorante para $|\iiint_D f|$. Justifique.