

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TESTE PARA PRATICAR:

TESTE 1 – 10 DE NOVEMBRO DE 2001

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (9:00-10:30)

(1) Considere a seguinte região contida em \mathbb{R}^3

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 \leq z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}.$$

(3 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int (\int (\int dx) dy) dz$.

(3 val.) (b) Seja $f(x, y, z) = x$. Calcule $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$.

(3 val.) (2) Um sólido na região

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{9}} \leq z \leq 4 - 3(x^2 + \frac{y^2}{9}), x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

tem densidade de massa $\sigma(x, y, z) = 2x$.

Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido.

(3) Considere os seguintes campos vectoriais.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(2xz, 2yz, x^2 + 10y^2 + z^2 \right), \quad \mathbf{G}(x, y, z) = ((x - 1)^2 + y^2)^3 (x - 1, y, 0).$$

(2 val.) (a) Determine se \mathbf{F} e \mathbf{G} são fechados.

(3 val.) (b) Determine se \mathbf{F} e \mathbf{G} são gradientes.

(3 val.) (c) Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ o caminho definido por $\alpha(t) = (e^{t^2}, e^{t^2} \sin t, 0)$. Calcule $\int \mathbf{G} \cdot d\alpha$.

(3 val.) (4) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . O laplaciano de f é a função $\Delta f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Seja $C_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \epsilon^2\}$ e $\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$.
Mostre que

$$\Delta f(x_0, y_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \int_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g},$$

onde \mathbf{g} é um caminho regular que percorre C_ϵ uma vez no sentido anti-horário.

Sugestão: Use o teorema de Green.

Soluções abreviadas:

- (1) (a) Os cortes com z constante formam quartos de coroas circulares no plano xy , com $x, y \geq 0$, com raio exterior dado por $1 + \sqrt{z}$ e raio interior dado por $1 - \sqrt{z}$. Logo temos,

$$Vol(V) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-\sqrt{z}} \left(\int_{\sqrt{(1-\sqrt{z})^2-y^2}}^{\sqrt{(1+\sqrt{z})^2-y^2}} dx \right) dy + \left(\int_{1-\sqrt{z}}^{1+\sqrt{z}} \left(\int_0^{\sqrt{(1+\sqrt{z})^2-y^2}} dx \right) dy \right) \right) dz.$$

- (b) Temos em coordenadas cilíndricas que $x = \rho \cos(\theta)$. Logo,

$$\begin{aligned} \iiint_V x dx dy dz &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^2 \left(\int_{(\rho-1)^2}^1 \rho \cos(\theta) dz \right) \rho d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^2 \rho^2 (1 - (\rho-1)^2) d\rho = 8/5. \end{aligned}$$

- (2) Nas coordenadas (ρ, θ, z) definidas pela transformação

$$g : \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = 3\rho \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

a região S é dada (excepto os pontos de S no eixo Oz que formam um subconjunto de conteúdo nulo) por, $0 < \rho \leq z \leq 4 - 3\rho^2$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. A matriz Jacobiana da transformação g é

$$Dg = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) & 0 \\ 3\sin(\theta) & 3\rho \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pelo que, $|\det(Dg)| = 3\rho$, e portanto

$$\begin{aligned} M = \int_S \sigma &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_{\rho}^{4-3\rho^2} 2\rho \cos(\theta) 3\rho dz d\rho d\theta \\ &= 6 \left(\int_0^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta \right) \int_0^1 \rho^2 \int_{\rho}^{4-3\rho^2} dz d\rho = \\ &= 6 \int_0^1 \rho^2 (4 - 3\rho^2 - \rho) d\rho = \\ &= 6 \left[\frac{4}{3}\rho^3 - \frac{3}{5}\rho^5 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1 = \frac{29}{10} \end{aligned}$$

- (3) (a) O campo \mathbf{F} não é fechado pois $\frac{\partial F_3}{\partial y} = 20y \neq \frac{\partial F_2}{\partial z} = 2y$. O campo \mathbf{G} é fechado:

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial G_2}{\partial x} = 6y(x-1) \left((x-1)^2 + y^2 \right)^2, \quad \frac{\partial G_1}{\partial z} = \frac{\partial G_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial G_2}{\partial z} = \frac{\partial G_3}{\partial y} = 0.$$

- (b) O campo \mathbf{F} não é gradiente porque não é fechado. O campo \mathbf{G} é fechado, é de classe C^1 em \mathbb{R}^3 . Como \mathbb{R}^3 é simplesmente conexo, \mathbf{G} é um gradiente. Em alternativa, pode mostrar-se que \mathbf{G} é um gradiente calculando um potencial:

$$\begin{aligned} \nabla \phi = \mathbf{G} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = G_1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = G_2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = G_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \frac{1}{8} \left((x-1)^2 + y^2 \right)^4 + A(y, z) \\ \phi = \frac{1}{8} \left((x-1)^2 + y^2 \right)^4 + B(x, z) \\ \phi = C(x, y) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \phi = \frac{1}{8} \left((x-1)^2 + y^2 \right)^4 + K, \end{aligned}$$

onde K é uma constante.

- (c) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha, temos

$$\int \mathbf{G} \cdot d\alpha = \phi(g(1)) - \phi(g(0)) = \phi(e, e \cdot \sin(1), 0) - \phi(1, 0, 0) = \frac{1}{8} \left((e-1)^2 + e^2 \sin^2(1) \right)^4.$$

- (4) Seja $D_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq \epsilon^2\}$. Aplicando o teorema de Green, vem

$$\int_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \iint_{D_\epsilon} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{D_\epsilon} \Delta f(x, y) dx dy.$$

Visto que f é de classe C^2 , o laplaciano Δf é contínuo. Deste facto e da igualdade anterior obtemos então

$$\begin{aligned} \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \int_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} - \Delta f(x_0, y_0) \right| &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\pi \epsilon^2} \iint_{D_\epsilon} \Delta f(x, y) dx dy - \Delta f(x_0, y_0) \right| \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \left| \iint_{D_\epsilon} (\Delta f(x, y) - \Delta f(x_0, y_0)) dx dy \right| \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \iint_{D_\epsilon} \max_{(x,y) \in D_\epsilon} |\Delta f(x, y) - \Delta f(x_0, y_0)| dx dy \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\max_{(x,y) \in D_\epsilon} |\Delta f(x, y) - \Delta f(x_0, y_0)| \pi \epsilon^2}{\pi \epsilon^2} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \max_{(x,y) \in D_\epsilon} |\Delta f(x, y) - \Delta f(x_0, y_0)| = 0. \end{aligned}$$