Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TESTE PARA PRATICAR:

TESTE 1 – 10 DE NOVEMBRO DE 2001

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (9:00-10:30)

(1) Considere a seguinte região contida em $\mathbb{R}^3$

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2}-1)^2 \leq z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}.$$

(3 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(3 val.) (b) Seja $f(x,y,z) = x$. Calcule $\iiint_V f(x,y,z)dx\,dy\,dz$.

(3 val.) (2) Um sólido na região

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \sqrt{x^2+\frac{y^2}{9}} \leq z \leq 4 - 3(x^2+\frac{y^2}{9}),\; x \geq 0,\; y \geq 0\right\}$$

tem densidade de massa $\sigma(x,y,z) = 2x$.

Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido.

(3) Considere os seguintes campos vectoriais.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(2xz,\, 2yz,\, x^2+10y^2+z^2\right), \quad \mathbf{G}(x,y,z) = ((x-1)^2+y^2)^3\left(x-1,\, y,\, 0\right).$$

(2 val.) (a) Determine se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são fechados.

(3 val.) (b) Determine se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são gradientes.

(3 val.) (c) Seja $\boldsymbol{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ o caminho definido por $\boldsymbol{\alpha}(t) = (e^{t^2}, e^{t^2}\operatorname{sen} t, 0)$. Calcule $\int \mathbf{G} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$.

(3 val.) (4) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. O *laplaciano* de f é a função $\Delta f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Seja $C_\epsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \epsilon^2\}$ e $\mathbf{F}(x,y) = (-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x})$. Mostre que

$$\Delta f(x_0,y_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \int_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g},$$

onde $\mathbf{g}$ é um caminho regular que percorre C_ϵ uma vez no sentido anti-horário.

Sugestão: Use o teorema de Green.

Soluções abreviadas:

(1) (a) Os cortes com z constante formam quartos de coroas circulares no plano xy, com $x, y \geq 0$, com raio exterior dado por $1+\sqrt{z}$ e raio interior dado por $1-\sqrt{z}$. Logo temos,

$$Vol(V) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-\sqrt{z}} \left(\int_{\sqrt{(1-\sqrt{z})^2-y^2}}^{\sqrt{(1+\sqrt{z})^2-y^2}} dx \right) dy + \left(\int_{1-\sqrt{z}}^{1+\sqrt{z}} \left(\int_0^{\sqrt{(1+\sqrt{z})^2-y^2}} dx \right) dy \right) \right) dz.$$

(b) Temos em coordenadas cilíndricas que $x = \rho\cos(\theta)$. Logo,

$$\iiint_V xdxdydz = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^2 \left(\int_{(\rho-1)^2}^1 \rho\cos(\theta)dz \right) \rho d\rho \right) d\theta$$
$$= \int_0^2 \rho^2(1-(\rho-1)^2)d\rho = 8/5.$$

(2) Nas coordenadas (ρ, θ, z) definidas pela transformação

$$g \ : \begin{cases} x = & \rho \ \cos(\theta) \\ y = & 3\rho \ \mathrm{sen}(\theta) \\ z = & z \end{cases}$$

a região S é dada (excepto os pontos de S no eixo Oz que formam um subconjunto de conteúdo nulo) por, $0 < \rho \leq z \leq 4-3\rho^2, \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. A matriz Jacobiana da transformação g é

$$Dg = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \ \mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ 3\mathrm{sen}(\theta) & 3\rho \ \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pelo que, $|\det(Dg)| = 3\rho$, e portanto

$$\begin{aligned} M = \int_S \sigma \quad &= \quad \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_\rho^{4-3\rho^2} 2\rho \ \cos(\theta) \ 3\rho \ dzd\rho d\theta \\ &= \quad 6 \left(\int_0^{\pi/2} \cos(\theta)d\theta \right) \int_0^1 \rho^2 \int_\rho^{4-3\rho^2} dzd\rho = \\ &= \quad 6\int_0^1 \rho^2(4-3\rho^2-\rho)d\rho = \\ &= \quad 6\left[\frac{4}{3}\rho^3 - \frac{3}{5}\rho^5 - \frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 \ = \ \frac{29}{10} \end{aligned}$$

(3) (a) O campo $\mathbf{F}$ não é fechado pois $\frac{\partial F_3}{\partial y} = 20y \neq \frac{\partial F_2}{\partial z} = 2y$. O campo $\mathbf{G}$ é fechado:

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial G_2}{\partial x} = 6y(x-1)\left((x-1)^2+y^2\right)^2 \ , \quad \frac{\partial G_1}{\partial z} = \frac{\partial G_3}{\partial x} = 0 \ , \quad \frac{\partial G_2}{\partial z} = \frac{\partial G_3}{\partial y} = 0 \ .$$

(b) O campo $\mathbf{F}$ não é gradiente porque não é fechado. O campo $\mathbf{G}$ é é fechado, é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Como $\mathbb{R}^3$ é simplesmente conexo, $\mathbf{G}$ é um gradiente. Em alternativa, pode mostrar-se que $\mathbf{G}$ é um gradiente calculando um potencial:

$$\nabla\phi = \mathbf{G} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = G_1 \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = G_2 \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = G_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \frac{1}{8}\left((x-1)^2+y^2\right)^4 + A(y,z) \\ \phi = \frac{1}{8}\left((x-1)^2+y^2\right)^4 + B(x,z) \\ \phi = C(x,y) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \phi = \frac{1}{8}\left((x-1)^2+y^2)\right)^4 + K,$$

onde K é uma constante.

(c) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha, temos

$$\int \mathbf{G}\cdot d\boldsymbol{\alpha} = \phi(g(1)) - \phi(g(0)) = \phi(e, e\cdot\mathrm{sen}(1), 0) - \phi(1,0,0) = \frac{1}{8}\left((e-1)^2 + e^2\mathrm{sen}^2(1)\right)^4 \ .$$

(4) Seja $D_\epsilon = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq \epsilon^2\right\}$. Aplicando o teorema de Green, vem

$$\int_{C_\epsilon} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{g} = \iint_{D_\epsilon} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \iint_{D_\epsilon} \Delta f(x,y)dxdy.$$

Visto que f é de classe C^2, o laplaciano Δf é contínuo. Deste facto e da igualdade anterior obtemos então

$$\begin{aligned} \left| \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \int_{C_\epsilon} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{g} - \Delta f(x_0,y_0) \right| &= \lim_{\epsilon\to 0} \left| \frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{D_\epsilon} \Delta f(x,y)dxdy - \Delta f(x_0,y_0) \right| \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \left| \iint_{D_\epsilon} \Big(\Delta f(x,y) - \Delta f(x_0,y_0)\Big) dxdy \right| \\ &\leq \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{D_\epsilon} \max_{(x,y)\in D_\epsilon} |\Delta f(x,y) - \Delta f(x_0,y_0)| \, dxdy \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\max_{(x,y)\in D_\epsilon} |\Delta f(x,y) - \Delta f(x_0,y_0)| \, \pi\epsilon^2}{\pi\epsilon^2} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \max_{(x,y)\in D_\epsilon} |\Delta f(x,y) - \Delta f(x_0,y_0)| \ = \ 0 \ . \end{aligned}$$