

ANÁLISE MATEMÁTICA III A – OUTONO 2005

PARTE V – TEOREMAS DE CONVERGÊNCIA E REGRA DE LEIBNIZ

EXERCÍCIOS COM POSSÍVEIS SOLUÇÕES ABREVIADAS

acessível em <http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/AMIII/>

**Exercício 1** [5.6-4 do Fleming (pág. 205)]

Mostre que  $\int f(x, y) dx dy$  existe se  $f$  é limitada, contínua e  $|f(x, y)| \leq C(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{p}{2}}$ ,  $p > 2$ .

**Solução:** Uma função contínua  $f$  é integrável se e só se o seu módulo  $|f|$  é integrável. Se  $f$  é contínua, então  $|f|$  é contínua. Para uma função contínua  $h$  (toma-se  $h = |f|$ ), por comparação, se  $h \leq g$  e  $g$  é integrável, então  $h$  é integrável. Portanto, basta demonstrar que a função  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x, y) = C(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{p}{2}}$ , onde  $C$  é uma constante real e  $p$  é um real maior do que 2, é integrável. Como  $g$  é contínua, a questão resume-se a verificar se o integral sobre  $\mathbb{R}^2$  da função positiva  $(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{p}{2}}$  é finito. Usando coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \int (1 + x^2 + y^2)^{-\frac{p}{2}} dV &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} (1 + r^2)^{-\frac{p}{2}} r d\theta dr \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R (1 + r^2)^{-\frac{p}{2}} 2\pi r dr \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[ (1 + r^2)^{1-\frac{p}{2}} \frac{\pi}{1-\frac{p}{2}} \right]_{r=0}^{r=R} \\ &= \frac{\pi}{1-\frac{p}{2}} < +\infty, \end{aligned}$$

porque  $\lim_{R \rightarrow +\infty} (1 + R^2)^{1-\frac{p}{2}} = 0$  uma vez que  $1 - \frac{p}{2} < 0$ . □

**Exercício 2** [5.11-5 do Fleming (pág. 236)]

Seja  $f_\nu(x) = \nu$  se  $x \in ]0, \frac{1}{\nu}[$  e  $f_\nu(x) = 0$  caso contrário, para  $\nu = 1, 2, \dots$ . Mostre que  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} f_\nu(x) = 0$  para todo o  $x$ , mas  $\int f_\nu dx = 1$ . Porque é que isto não contraria o teorema da convergência dominada de Lebesgue?

**Solução:** Cada  $f_\nu$  é uma função em escada, com  $\int f_\nu dx = \nu \cdot \frac{1}{\nu} = 1, \forall \nu$ . Para todo o  $x$  real tem-se  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} f_\nu(x) = 0$  porque, quando  $x \notin ]0, 1[$ ,  $f_\nu(x) = 0, \forall \nu$ , e, quando  $x \in ]0, 1[$ , existe um inteiro  $N$  tal que  $x > \frac{1}{N}$ , pelo que  $f_\nu(x) = 0$  para qualquer  $\nu \geq N$ .

Isto não contraria o teorema da convergência dominada, porque a sucessão  $f_1, f_2, \dots$  não é dominada por qualquer função integrável, uma vez que a menor função  $g$  tal que  $|f_\nu| \leq g, \forall \nu$ , é a função em escada

$$g(x) = \begin{cases} n & \text{se } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[, \quad n=1,2,\dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

cujo integral é  $\int g dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$ . □

**Exercício 3** [5.12-1 do Fleming (pág. 239)]

Determine  $\phi'(t)$  se  $\phi(t)$  é:

(a)  $\int_0^1 \ln(x^2 + t^2) dx, t \neq 0$ ;

(b)  $\int_0^\pi \frac{1}{x} e^{xt} \sin x dx$ .

**Solução:** Para ambas as alíneas verificam-se as hipóteses do teorema que dá a derivada do integral como o integral da derivada, relativamente a um parâmetro (regra de Leibniz).

(a) Para  $t \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \ln(x^2 + t^2) dx = \int_0^1 \frac{2t}{x^2 + t^2} dx \\ &= \int_0^1 2 \frac{\frac{1}{t}}{1 + (\frac{x}{t})^2} dx = [2 \arctan(\frac{x}{t})]_{x=0}^{x=1} = 2 \arctan(\frac{1}{t}). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{x} e^{xt} \sin x \right) dx = \int_0^\pi e^{xt} \sin x dx \\ &= \left[ \frac{e^{xt}(t \sin x - \cos x)}{1+t^2} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1+e^{\pi t}}{t^2+1}, \end{aligned}$$

onde a primitiva de  $e^{xt} \sin x$  em ordem a  $x$  foi obtida primitivando por partes duas vezes. □

**Exercício 4** [5.12-4 do Fleming (pág. 239)]

Mostre que

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = f(b(t), t)b'(t) - f(a(t), t)a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

desde que  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial t}$  sejam contínuas em  $[a_0, b_0] \times B$  onde  $B$  é aberto, com  $a_0 \leq a(t) \leq b_0$  e  $a_0 \leq b(t) \leq b_0$  para todo o  $t \in B$ , e desde que as funções  $a$  e  $b$  sejam de classe  $C^1$ .

**Solução:** Considere-se  $F(x, t) = \int_{a_0}^x f(s, t) ds$ . Então  $\frac{\partial F}{\partial x} = f$  pelo teorema fundamental do cálculo e  $\frac{\partial F}{\partial t} = \int_{a_0}^x \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) ds$  pela regra de Leibniz. Como  $\int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = F(b(t), t) - F(a(t), t)$ , vai-se calcular a derivada desta diferença usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx &= \frac{d}{dt} (F(b(t), t) - F(a(t), t)) \\ &= \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(b(t), t)}_f b'(t) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}(b(t), t)}_{\int_{a_0}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) ds} - \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(a(t), t)}_f a'(t) - \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}(a(t), t)}_{\int_{a_0}^{a(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) ds} \\ &= f(b(t), t)b'(t) - f(a(t), t)a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx. \end{aligned}$$

□