

ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 1 – 10 DE OUTUBRO DE 2005 – 15:10-16H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação das alíneas em cada problema igualmente repartida.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 2ª feira, 17 de Outubro, 18h30-19h30, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: _____

Nome: _____

(1) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (\cos(\pi x) + y, \sin(\pi x) - y) .$$

(a) Mostre que f é invertível numa vizinhança de $(1, 0)$.

(b) Calcule a derivada da função inversa no ponto $(-1, 0)$.

(2) A equação

$$xyz + e^z + xz^4 - x = 1$$

define uma variedade que pode ser representada, nalguma vizinhança do ponto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, como o gráfico de uma função $z = f(x, y)$ (não se pede que demonstre esta afirmação). Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

(3) Considere o conjunto

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = yz + 2\} .$$

(a) Mostre que X é uma variedade de dimensão 2.

(b) Calcule a distância de X à origem.

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Qualquer subconjunto fechado de um conjunto compacto em \mathbb{R}^n é compacto.

Verdadeira

Falsa

(b) Se a jacobiana em $p \in \mathbb{R}^{n+m}$ de uma função continuamente diferenciável $F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ tem todas as entradas não nulas, então o Teorema da Função Implícita é aplicável a F perto desse ponto p .

Verdadeira

Falsa

- (c) Há uma variedade X em \mathbb{R}^3 cujos espaço tangente e espaço normal num determinado ponto de X têm ambos dimensão 2.

Verdadeira

Falsa

- (d) Qualquer função contínua $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ restrita à parábola X de equação $x = y^2$ assume um valor máximo sobre X .

Verdadeira

Falsa

- (e) Há uma função $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujo nível zero é uma variedade de dimensão 3.

Verdadeira

Falsa