

## ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 1 – 10 DE OUTUBRO DE 2005 – 15:10-16H

### Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação das alíneas em cada problema igualmente repartida.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 2ª feira, 17 de Outubro, 18h30-19h30, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

### Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

(1) Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$f(x, y) = (x + \sin(\pi y), x + \cos(\pi y)) .$$

(a) Mostre que  $f$  é invertível numa vizinhança de  $(0, 1)$ .

(b) Calcule a derivada da função inversa no ponto  $(0, -1)$ .

(2) A equação

$$xyz + e^z - e^y = 0$$

define uma variedade que pode ser representada, nalguma vizinhança do ponto  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ , como o gráfico de uma função  $z = f(x, y)$  (não se pede que demonstre esta afirmação). Calcule  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

(3) Considere o conjunto

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy + 2\} .$$

(a) Mostre que  $X$  é uma variedade de dimensão 2.

(b) Calcule a distância de  $X$  à origem.

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Há um subconjunto fechado de um compacto em  $\mathbb{R}^n$  que não é compacto.

Verdadeira

Falsa

(b) Se a jacobiana em  $p \in \mathbb{R}^n$  de uma função continuamente diferenciável  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tem todas as entradas não nulas, então o Teorema da Função Inversa é aplicável perto desse ponto  $p$ .

Verdadeira

Falsa

- (c) Há uma variedade  $X$  em  $\mathbb{R}^5$  cujos espaço tangente e espaço normal num determinado ponto de  $X$  têm ambos dimensão 3.

Verdadeira

Falsa

- (d) Qualquer função contínua  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  restrita à elipse  $X$  de equação  $2x^2 + 3y^2 = 6$  assume um valor máximo sobre  $X$ .

Verdadeira

Falsa

- (e) Há uma função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cujo nível zero é uma variedade de dimensão 2.

Verdadeira

Falsa