

ANÁLISE MATEMÁTICA III A
TESTE 2 PARA PRATICAR – OUTUBRO DE 2005

Duração: 50 minutos

o aspecto do resto desta página e a estrutura das perguntas coincidem com os do teste real

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação das alíneas em cada problema igualmente repartida.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- Utilize papel de rascunho para esboços e cálculos preliminares, de modo a guardar o espaço de resposta para uma **apresentação clara e bem justificada** de todos os cálculos ou argumentos.
- **A revisão de provas** é na 2ª feira, 7 de Novembro, 18h30-19h30, na *antiga* sala de dúvidas, localizada na cave -2 do Edifício de Pós-Graduação.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)	
(2)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
total	

Nº:

Curso: _____

Nome: _____

- (1) Forneça uma expressão em termos de integrais iterados para o momento de inércia I_x em relação ao eixo dos xx de um sólido no primeiro octante limitado pelos planos coordenados e pelos planos de equações $x + y + z = 1$ e $x + y + 2z = 2$, assumindo que a densidade de massa é constante igual a 1.

(2) Usando a mudança de coordenadas

$$x = e^s \cos t \quad \text{e} \quad y = e^s \sin t ,$$

calcule $\int_X f$ onde $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2 \text{ e } y \geq 0\}$ e

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} , \quad f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} .$$

- (3) (a) Exprima o seguinte integral (escrito em coordenadas cartesianas) como um integral iterado em coordenadas esféricas:

$$\int_1^2 \int_{-\sqrt{6-z^2}}^{\sqrt{6-z^2}} \int_0^{\sqrt{6-y^2-z^2}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz .$$

- (b) Exprima o seguinte integral como um integral iterado em coordenadas cartesianas da função $f(x, y, z)$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{2 \cos \theta + \sin \theta}}^1 \int_{2 \rho \cos \theta}^{2 + \rho \sin \theta} f(2 \rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz d\rho d\theta .$$

- (4) (a) Demonstre o *teorema do valor intermédio para integrais*: Seja X um conjunto compacto e conexo em \mathbb{R}^n . Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não-negativa integrável sobre X . Prove que existe um ponto $x_0 \in X$ tal que

$$\int_X fg = f(x_0) \int_X g .$$

- (b) Mostre que qualquer variedade X em \mathbb{R}^n com dimensão m menor do que n tem medida nula.

Sugestão: Qualquer ponto da variedade admite uma vizinhança \mathcal{U} onde $X \cap \mathcal{U}$ é o gráfico de uma função continuamente diferenciável de um subconjunto de \mathbb{R}^m para um subconjunto de \mathbb{R}^{n-m} .

PARA RASCUNHO