Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise



# ANÁLISE MATEMÁTICA III A

## TESTE 3 – 21 DE NOVEMBRO DE 2005 – 15:10-16H

*RESOLUÇÃO*

*(As soluções aqui propostas não são únicas!)*

**Duração: 50 minutos**

**Instruções**

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação das alíneas em cada problema igualmente repartida.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- Utilize papel de rascunho para esboços e cálculos preliminares, de modo a guardar o espaço de resposta para uma **apresentação clara e bem justificada** de todos os cálculos ou argumentos.
- **A revisão de provas** é na 2ª feira, 28 de Novembro, 18h30-19h30, na *antiga* sala de dúvidas, localizada na cave -2 do Edifício de Pós-Graduação.
- Boa sorte!

**Para a correcção**

| pergunta | classificação |
|---|---|
| (1)(a) | |
| (1)(b) | |
| (2)(a) | |
| (2)(b) | |
| (3)(a) | |
| (3)(b) | |
| (3)(c) | |
| (3)(d) | |
| (3)(e) | |
| (4) | |
| total | |

**Nº:**

**Curso:** ________________

**Nome:** ____________________________________________

(1) Calcule os *pullbacks* $g^*\omega$ das seguintes formas diferenciais pela transformação

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ , \quad g(s,t) = (e^s \cos t, e^s \sin t, e^{-s}) \ .$$

(a) $\omega = y\,dx - x\,dy$;
(b) $\omega = y\,dx \wedge dz - x\,dy \wedge dz$.

**Resolução:** *Como*

$$\begin{array}{rcl} g^*dx &=& dg^x \ = \ d\,(e^s \cos t) \ = \ e^s \cos t\, ds - e^s \sin t\, dt \ , \\ g^*dy &=& dg^y \ = \ d\,(e^s \sin t) \ = \ e^s \sin t\, ds + e^s \cos t\, dt \\ g^*dz &=& dg^z \ = \ d\,(e^{-s}) \ = \ -e^{-s}\, ds \ , \end{array}$$ *e*

*obtém-se:*

(a)

$$\begin{array}{rcl} g^*\omega &=& g^y\, dg^x - g^x\, dg^y \\ &=& e^s \sin t\,(e^s \cos t\, ds - e^s \sin t\, dt) - e^s \cos t\,(e^s \sin t\, ds + e^s \cos t\, dt) \\ &=& -e^{2s}\, dt \end{array}$$

*e*

(b)

$$\begin{array}{rcl} g^*\omega &=& g^y\, dg^x \wedge dg^z - g^x\, dg^y \wedge dg^z \\ &=& e^s \sin t\,(-e^s \sin t\, dt) \wedge (-e^{-s}\, ds) - e^s \cos t\,(e^s \cos t\, dt) \wedge (-e^{-s}\, ds) \\ &=& -e^s\, ds \wedge dt \ . \end{array}$$

**Alternativa:** *Notando que a forma da alínea (b) é o produto da forma da alínea (a) por* $dz$, *obtém-se*

$$g^*\omega = g^*(y\,dx - x\,dy) \wedge g^*dz = -e^s\, ds \wedge dt \ .$$

□

(2) Decida justificadamente se as seguintes formas diferenciais são exactas e, em caso afirmativo, calcule um potencial.

(a) $\omega = 3x^2y\,dx + x^3\,dy + e^z\,dt$ em $\mathbb{R}^4$;

(b) $\omega = dx \wedge dy + (\cos(x+y)+1)dx \wedge dz + (\cos(x+y)+1)dy \wedge dz$ em $\mathbb{R}^3$.

**Resolução:**

(a) *Começa-se por verificar se a forma é fechada:*

$$\begin{aligned} d\omega &= d(3x^2y) \wedge dx + d(x^3) \wedge dy + d(e^z) \wedge dt \\ &= 3x^2\,dy \wedge dx + 3x^2\,dx \wedge dy + e^z\,dz \wedge dt \\ &= e^z\,dz \wedge dt \neq 0\ . \end{aligned}$$

*Como* $\omega$ não *é fechada, não pode ser exacta.*

(b) *Como a forma é fechada,*

$$\begin{aligned} d\omega &= 0 + d(\cos(x+y)+1) \wedge dx \wedge dz + d(\cos(x+y)+1) \wedge dy \wedge dz \\ &= -\sin(x+y)\,dy \wedge dx \wedge dz - \sin(x+y)\,dx \wedge dy \wedge dz = 0\ , \end{aligned}$$

*e o seu domínio, todo o* $\mathbb{R}^3$, *é em estrela, conclui-se que* $\omega$ *é exacta. Procura-se um potencial da forma*

$$\alpha = \alpha_2\,dy + \alpha_3\,dz\ .$$

*Para um* $\alpha$ *assim tem-se*

$$d\alpha = \omega \iff \begin{cases} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} = \cos(x+y)+1 \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} = \cos(x+y)+1 \end{cases}$$

*Substituindo as soluções gerais da primeira e da segunda equações,* $\alpha_2 = x + g(y,z)$ *e* $\alpha_3 = \sin(x+y) + x + h(y,z)$ *na terceira equação, obtém-se*

$$\cos(x+y) + \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = \cos(x+y)+1 \iff \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = 1\ .$$

*Por exemplo, as funções* $g(y,z) \equiv 0$ *e* $h(y,z) = y$ *fornecem uma solução que conduz ao potencial para* $\omega$

$$\alpha = x\,dy + (\sin(x+y) + x + y)\,dz\ .$$

□

(3) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Para quaisquer covectores-$r$ em $\mathbb{R}^n$ $(r = 1, \ldots, n)$ tem-se

$$a \wedge b + b \wedge a = 0 \ .$$

Verdadeira $\square$ Falsa $\boxed{\text{X}}$

**Resolução:** *Por exemplo, quando* $a = e^1$ *e* $b = e^2 \wedge e^3$ *em* $\mathbb{R}^3$ *tem-se*

$$a \wedge b + b \wedge a = 2\, e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \neq 0 \ .$$

*(Tem-se* $a \wedge b + b \wedge a = 0$ *se ambos* $a$ *e* $b$ *têm grau ímpar.)* $\square$

(b) O espaço vectorial $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)^*$ dos covectores-$r$ em $\mathbb{R}^n$ tem dimensão $n - r + 1$, $\forall r = 1, \ldots, n$.

Verdadeira $\square$ Falsa $\boxed{\text{X}}$

**Resolução:** *O espaço vectorial* $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)^*$ *tem dimensão* $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. *Por exemplo, para* $r = 2$ *e* $n = 3$ *tem-se* $\dim \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^* = 3 \neq 2 = n - r + 1$. $\square$

(c) Há uma forma exacta $\omega$ para a qual $\omega \wedge \omega$ não é exacta.

Verdadeira ☐ Falsa [X]

**Resolução:** *Sendo exacta, $\omega$ é fechada. Se $\alpha$ é um potencial para $\omega$, ou seja $d\alpha = \omega$, então*

$$d(\alpha \wedge \omega) = d\alpha \wedge \omega + 0 = \omega \wedge \omega \ ,$$

*o que mostra que $\alpha \wedge \omega$ é um potencial para $\omega \wedge \omega$.* $\square$

(d) Se $\alpha$ é uma forma fechada definida na união de dois discos abertos disjuntos em $\mathbb{R}^2$, então $\alpha$ é exacta.

Verdadeira [X] Falsa ☐

**Resolução:** *Cada um dos discos é um conjunto em estrela. Pelo lema de Poincaré, conclui-se que $\alpha$ é uma forma exacta em cada um dos discos. Uma vez que os discos são disjuntos, pode-se definir um potencial para $\alpha$ dado separadamente por um potencial em cada disco.* $\square$

(e) Para quaisquer campos vectoriais fechados $F$ e $G$ em $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\operatorname{div}(F \times G) = 0 \ .$$

Verdadeira [X] Falsa ☐

**Resolução:** *Escrevendo $\alpha_F = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ e $\beta_G = G_x dy \wedge dz + G_y dz \wedge dx + G_z dx \wedge dy$, tem-se $\beta_{F\times G} = \alpha_F \wedge \alpha_G$, pelo que*

$$\operatorname{div}(F \times G)\, dx \wedge dy \wedge dz = d\beta_{F\times G} = d(\alpha_F \wedge \alpha_G) = d\alpha_F \wedge \alpha_G - \alpha_F \wedge d\alpha_G \ .$$

*Se $F$ e $G$ são fechados, i.e., $\operatorname{rot} F = \operatorname{rot} G = 0$, então $d\alpha_F = \beta_{\operatorname{rot} F} = 0$ e $d\alpha_G = \beta_{\operatorname{rot} G} = 0$.* $\square$

(4) Sejam $\omega_1, \ldots, \omega_k$ formas-1 num aberto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tais que

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{k} f_{ij}\, dg_j$$

para certas funções $f_{ij}$ e $g_j$ de classe $C^2$ $(1 \leq i, j \leq k)$. Supondo que os covectores-1 $\omega_1(x), \ldots, \omega_k(x)$ são linearmente independentes em todos os pontos $x \in A$, determine formas-1 $\theta_{ij}$ tais que

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{k} \theta_{ij} \wedge \omega_j \ .$$

**Sugestão:** Em cada ponto $x$, a matriz $(f_{ij}(x))$ é invertível.

**Resolução:** *A expressão para os $\omega_i$'s dá*

$$d\omega_i = \sum_{\ell=1}^{k} df_{i\ell} \wedge dg_\ell \ .$$

*Uma vez que os covectores-1 $\omega_1(x), \ldots, \omega_k(x)$ são linearmente independentes em todos os pontos $x \in A$, tem-se que em cada ponto a matriz $(f_{ij}(x))$ é invertível. Seja $(h_{ij}(x))$ a matriz inversa de $(f_{ij}(x))$. Então*

$$dg_\ell = \sum_{j=1}^{k} h_{\ell j}\, \omega_j$$

*pelo que*

$$d\omega_i = \sum_{\ell=1}^{k} df_{i\ell} \wedge \left( \sum_{j=1}^{k} h_{\ell j}\, \omega_j \right) = \sum_{j=1}^{k} \left( \sum_{\ell=1}^{k} h_{\ell j}\, df_{i\ell} \right) \wedge \omega_j \ .$$

*Tome-se $\theta_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} h_{\ell j}\, df_{i\ell}$.* □