Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 3 PARA PRATICAR – NOVEMBRO DE 2005

Duração: 50 minutos

o aspecto do resto desta página e a estrutura das perguntas coincidem com os do teste real

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação das alíneas em cada problema igualmente repartida.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- Utilize papel de rascunho para esboços e cálculos preliminares, de modo a guardar o espaço de resposta para uma **apresentação clara e bem justificada** de todos os cálculos ou argumentos.
- **A revisão de provas** é na 2ª feira, 28 de Novembro, 18h30-19h30, na *antiga* sala de dúvidas, localizada na cave -2 do Edifício de Pós-Graduação.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(3)(c)	
(3)(d)	
(3)(e)	
(4)	
total	

Nº:

Curso: ________________

Nome: ____

(1) Calcule os *pullbacks* $g^*\omega$ das seguintes formas diferenciais pela transformação

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \ , \qquad g(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+1}, (x^2+1)e^{yz}, z, x+z \right) \ .$$

(a) $\omega = x\,dy + y\,dx$;
(b) $\omega = y\,dx \wedge dy \wedge dz + e^{xyzt}\,dx \wedge dz \wedge dt$.

(2) Decida justificadamente se as seguintes formas diferenciais são exactas e, em caso afirmativo, calcule um potencial.
   (a) $\omega = ye^{xy}\,dx \wedge dy + yz\cos(xyz)\,dx \wedge dz + xz\cos(xyz)\,dy \wedge dz$ em $\mathbb{R}^3$;
   (b) $\omega = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$ em $\mathbb{R}^4$.

(3) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Para quaisquer covectores-1 em $\mathbb{R}^n$ tem-se

$$(a+b) \wedge c = a \wedge (b+c) \ .$$

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(b) Para quaisquer formas de grau ímpar tem-se

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma = \gamma \wedge \beta \wedge \alpha \ .$$

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(c) Se α e β são dois potenciais para ω em todo o $\mathbb{R}^n$, então a diferença $\alpha - \beta$ é uma forma exacta.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(d) Se ω é uma forma-2 (de classe C^1) definida em todo $\mathbb{R}^{2n}$, então o produto exterior com n factores $\omega^n = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ é uma forma exacta.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(e) Para qualquer campo vectorial (de classe C^2) $F = (M, N, P)$ em $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}F) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}F) - \Delta F \ ,$$

onde $\Delta(M, N, P) = (\Delta M, \Delta N, \Delta P)$ e $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ é o laplaciano usual do campo escalar f.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(4) Para a forma

$$\omega = (E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz) \wedge dt + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$$

onde B_i e E_i $(i = 1, 2, 3)$ são funções de classe C^1 num aberto de $\mathbb{R}^4$, mostre que escrevendo $E = (E_1, E_2, E_3)$ e $B = (B_1, B_2, B_3)$

$$d\omega = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{div} B = 0 \ .$$

(Os operadores rot e div são tomados relativamente às variáveis (x, y, z).)