Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 4 – 12 DE DEZEMBRO DE 2005 – 15:10-16H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação de cada alínea 2.5.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- Utilize papel de rascunho para esboços e cálculos preliminares, de modo a guardar o espaço de resposta para uma **apresentação clara e bem justificada** de todos os cálculos ou argumentos.
- **A revisão de provas** é na 6ª feira, 16 de Dezembro, 18h30-19h30, na *antiga* sala de dúvidas, localizada na cave -2 do Edifício de Pós-Graduação.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Considere a variedade

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = 1 - x^2 - y^2, y > 0\} .$$

(a) Exiba uma parametrização global de X.

(b) Calcule a massa de uma placa com a forma de X e densidade de massa $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$.

(2) Seja F o campo vectorial dado por $F(x,y,z) = (x, -2y, z)$ e considere as variedades $A = \{(x,y,z) : x^2+y^2 < 1, z = 2\}$ e $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-2)^2 = 1, z > 2\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(a) Usando a definição, calcule o fluxo de F através de A segundo a normal unitária ν que satisfaz $\nu(0,0,2) = (0,0,1)$.

(b) Usando o teorema de divergência, calcule o fluxo de F através de B segundo a normal unitária n que satisfaz $n(0,0,3) = (0,0,1)$.

(3) Seja C o quadrado de vértices $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ e $(-1,1)$ percorrido (uma vez) no sentido directo.

(a) Calcule

$$\int_C P\,dx + Q\,dy$$

onde $P(x,y) = y^2e^x + y$ e $Q(x,y) = 2ye^x + x^2 + 3$.

(b) Calcule

$$\int_C (P+M)\,dx + (Q+N)\,dy$$

onde (P,Q) é como na alínea (a) e $F = (M,N)$ é um campo vectorial fechado de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ para o qual $\int_\gamma F = 2\pi$ onde γ é a circunferência de raio 1 e centro na origem percorrida no sentido directo.

(4) Seja A a porção do hiperbolóide $y^2 = x^2 + z^2 + 1$ na faixa $\sqrt{2} < y < \sqrt{5}$.

(a) Escolha uma orientação o de A e parametrize cada componente de ∂A em termos de uma coordenada angular respeitando a orientação induzida por o.

(b) Use o teorema de Stokes para calcular $\int_{A^o} x\,dx \wedge dz$ onde o é a orientação que escolheu na alínea (a).

Teorema de Stokes e casos particulares (Green, divergência e Stokes clássico)

$$\int_{(\partial A)^o} \omega = \int_{A^o} d\omega$$

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{C_i^{o+}} (M\,dx + N\,dy) = \int_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$\int_{\partial A} F \cdot \nu\, dV_2 = \int_A \mathrm{div}\,\mathrm{F}\,\mathrm{dV}_3$$

$$\int_\gamma F = \int_A \mathrm{rot}\,\mathrm{F} \cdot \nu\,\mathrm{dV}_2$$