Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE DE RECUPERAÇÃO – 19 DE DEZEMBRO DE 2005 – 11:10-12H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação de cada alínea 2.5.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- Utilize papel de rascunho para esboços e cálculos preliminares, de modo a guardar o espaço de resposta para uma **apresentação clara e bem justificada** de todos os cálculos ou argumentos.
- **A revisão de provas** é na 4ª feira, 4 de Janeiro de 2006, 11h-12h, na *antiga* sala de dúvidas, localizada na cave -2 do Edifício de Pós-Graduação.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Considere a variedade

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 5, z = 1\} \ .$$

(a) Exiba uma parametrização de X excepto um ponto.
(b) Calcule a massa de um filamento com a forma de X e densidade de massa $f(x, y, z) = 1 + x^2$.

(2) Seja S o cone sólido em $\mathbb{R}^3$ com base $B = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 < 1, x = 1\}$ e vértice na origem. Seja $F(x, y, z) = (z^2, y^2, 0)$ um campo vectorial em $\mathbb{R}^3$.
   (a) Usando a definição, calcule $\int_B F \cdot n \, dV_2$ onde n é a normal que aponta para dentro de S.
   (b) Utilizando o teorema da divergência, calcule $\int_A F \cdot n \, dV_2$ onde $A = \partial S \setminus B$ e n é a normal que aponta para dentro de S.

(3) No cilindro X de equação $x^2 + z^2 = 1$, considere a porção A na faixa $-1 < y < 1$.

(a) Use o teorema de Stokes para calcular $\int_{A^o} d\omega$, onde $\omega = z\,dx + x\,dy + y\,dz$ e o é uma orientação à sua escolha.

(b) Considere as circunferências $B = \{(x, -1, z) \in X\}$ e $C = \{(x, 1, z) \in X\}$ com orientações o induzidas pela orientação o escolhida em (a). Seja α uma forma-1 fechada em X. Relacione $\int_{B^o} \alpha$ com $\int_{C^o} \alpha$.

(4) Considere os campos vectoriais

$$G(x,y,z) = \frac{1}{x^2+z^2}(z,0,-x) \quad \text{e} \quad F(x,y,z) = G(x,y,z) + \sqrt{2}G(x,y,z-1) \; .$$

(a) Calcule o trabalho de G ao longo da circunferência definida por $x^2+z^2=1$ e $y=0$, percorrida no sentido positivo para um observador colocado no ponto $(0,10,0)$, e diga se G é ou não um gradiente no seu domínio.

(b) Quais são os possíveis valores para o trabalho de F ao longo de curvas fechadas simples no domínio de F?

Teorema de Stokes e casos particulares (Green, divergência e Stokes clássico)

$$\int_{(\partial A)^o} \omega = \int_{A^o} d\omega$$

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{C_i^{o+}} (M\,dx + N\,dy) = \int_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$\int_{\partial A} F \cdot \nu\, dV_2 = \int_A \mathrm{div}\,\mathrm{F}\,\mathrm{dV}_3$$

$$\int_\gamma F = \int_A \mathrm{rot}\,\mathrm{F} \cdot \nu\,\mathrm{dV}_2$$