

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

FICHA 1 – NÚMEROS COMPLEXOS E FUNÇÕES COMPLEXAS

para entregar até à aula teórica de **6ª feira, 7 de Março**

(1) Esboce os conjuntos dados pelas seguintes condições e diga quais deles são regiões:

- (a) $|z + 1 - i| \leq 3$;
- (b) $\text{Im } z > 1$ e $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$;
- (c) $\text{Re } z + \text{Im } z = 0$;
- (d) $|z + i| > 2|z|$.

(2) Calcule $\sqrt{-i}$, $\sqrt[3]{-i}$ e $\sqrt[4]{-i}$ e represente estes números geometricamente.

(3) Resolva as seguintes equações:

- (a) $z^2 + 2iz + i - 1 = 0$;
- (b) $z^3 = (2 - i)^3 + \frac{1+28i}{2+i}$.

(4) Exprima $\cos 4\varphi$ e $\sin 3\varphi$ em termos de $\cos \varphi$ e $\sin \varphi$.

(5) Seja $f(z) = (x^2 - y^2) + 2i|xy|$ para $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Determine o subconjunto de \mathbb{C} onde f é analítica e calcule $f'(z)$ nesses pontos.

(6) (a) Mostre que em coordenadas polares as equações de Cauchy-Riemann se escrevem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} . \end{cases}$$

(b) Mostre que a função

$$g(z) = g(\rho e^{i\theta}) = 3 \ln \frac{\rho}{5} + i3\theta$$

é analítica em todo o seu domínio $\rho > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$. Calcule $g'(z)$.