Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 21/2/2003

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

FICHA 1 – NÚMEROS COMPLEXOS E FUNÇÕES COMPLEXAS

para entregar até à aula teórica de **6ª feira, 7 de Março**

(1) Esboce os conjuntos dados pelas seguintes condições e diga quais deles são regiões:
- (a) $|z+1-i| \leq 3$;
- (b) $\operatorname{Im} z > 1$ e $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$;
- (c) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$;
- (d) $|z+i| > 2|z|$.

(2) Calcule $\sqrt{-i}$, $\sqrt[3]{-i}$ e $\sqrt[4]{-i}$ e represente estes números geometricamente.

(3) Resolva as seguintes equações:
- (a) $z^2 + 2iz + i - 1 = 0$;
- (b) $z^3 = (2-i)^3 + \frac{1+28i}{2+i}$.

(4) Exprima $\cos 4\varphi$ e $\sin 3\varphi$ em termos de $\cos\varphi$ e $\sin\varphi$.

(5) Seja $f(z) = (x^2 - y^2) + 2i|xy|$ para $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Determine o subconjunto de $\mathbb{C}$ onde f é analítica e calcule $f'(z)$ nesses pontos.

(6) (a) Mostre que em coordenadas polares as equações de Cauchy-Riemann se escrevem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases} .$$

(b) Mostre que a função

$$g(z) = g\left(\rho e^{i\theta}\right) = 3\ln\frac{\rho}{5} + i3\theta$$

é analítica em todo o seu domínio $\rho > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$. Calcule $g'(z)$.